అధ్యాయము

5

వర్గసమీకరణాలు (నోట్స్)

(QUADRATIC EQUATIONS)

PREPARED BY: బలభద్ర సురేష్ , అమలాపురం ,9866845885

1. చరరాశి x లో వర్గసమీకరణం యొక్క సాధారణ(ప్రామాణిక) రూపం $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, ఇక్కడ a, b, c లు వాస్తవసంఖ్యలు మరియు $a \neq 0$.
2. $y = ax^2 + bx + c$ ను వర్గ ప్రమేయం అందురు .
3. వర్గసమీకరణాల /ప్రమేయాల ఉపయోగాలు .
   - (i) ప్రయోగించబడిన రాకెట్ యొక్క మార్గము, ఎత్తులు ఒక వర్గసమీకరణం /ప్రమేయం చే నిర్వచించ బడుతాయి .'
   - (ii) ఉపగ్రహాల నుంచి సిగ్నల్స్ ను స్వీకరించే డిష్ గొడుగుల ఆకారాలు, టెలిస్కోప్ లలో వాడే పరావర్తన అద్దాల ఆకారాలు, కళ్లజోడులో కటకాల ఆకారాలు, ఖగోళ వస్తువుల కక్ష్య మార్గాలు వర్గ సమీకరణాలచే నిర్వచించబడుతాయి .
   - (iii) ఒక ప్రక్షేపకము యొక్క మార్గము ఒక వర్గసమీకరణంచే సూచించబడుతుంది .
   - (iv) ఒక వాహనము బ్రేకులు వేసినపుడు అది ఆగే దూరమును గణించుటలో వర్గ సమీకరణం ఉపయోగపడుతుంది
4. వర్గసమీకరణం యొక్క మూలాలు : ఏదైనా ఒక వాస్తవసంఖ్య 'α' కు $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ అయిన 'α' ను $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గసమీకరణం యొక్క మూలము అందురు .
5. వర్గ సూత్రము : వర్గసమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలు కనుగొనుటకు సూత్రము.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

6. మూలాల స్వభావము :

   వర్గసమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాల స్వభావం విచక్షణి $b^2 - 4ac$ పై ఆదారపడి ఉంటుంది

   (i) $b^2 - 4ac > 0$ అయిన రెండు వేరు వేరు వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉంటుంది
   (ii) $b^2 - 4ac = 0$ అయిన రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉంటుంది
   (iii) $b^2 - 4ac < 0$ అయిన వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉండదు

ప్రయత్నించండి

క్రింది సమీకరణాలు వర్గ సమీకరణలో కాదో తెలపండి ?

(i) $x^2 - 6x - 4 = 0$

సాధన : వర్గసమీకరణం

BALABHADRA SURESH

(ii) $x^3 - 6x^2 + 2x - 1 = 0$

సాధన : వర్గసమీకరణం కాదు .

(iii) $7x = 2x^2$

సాధన : $2x^2 - 7x = 0$

వర్గసమీకరణం

(iv) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$

సాధన : $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$

$$\Rightarrow \frac{x^4 + 1}{x^2} = 2$$

$$\Rightarrow x^4 + 1 = 2x^2$$

$\Rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ వర్గసమీకరణం కాదు

$v)$ $(2x + 1)(3x + 1) = b(x-1)(x-2)$

సాధన : $(2x + 1)(3x + 1) = b(x-1)(x-2)$

$$2x(3x+1) + 1(3x+1) = b[x(x-2) - 1(x-2)]$$
$$6x^2 + 2x + 3x + 1 = b[x^2 - 2x - x + 2]$$
$$6x^2 + 5x + 1 = b[x^2 - 3x + 2]$$
$$6x^2 + 5x + 1 = bx^2 - 3bx + 2b$$
$$6x^2 - bx^2 + 5x + 3bx + 1 - 2b = 0$$
$$(6-b)x^2 + (5+3b)x + 1 - 2b = 0$$

వర్గసమీకరణం.

(vi) $3y^2 = 192$

సాధన : $3y^2 - 192 = 0$

వర్గసమీకరణం

ఉదాహరణ -1.

i. రాజు మరియు రాజేందర్ ఇద్దరి వద్ద కలసి 45 గోళీలు కలవు . అయితే ఇద్దరూ చెరి 5 గోళీలను పోగొట్టుకున్నారు. ఇద్దరి వద్ద మిగిలిన గోళీల సంఖ్యల యొక్క లబ్ధము 124 అయిన ఇద్దరి వద్ద మొదట ఉన్నగోళీల సంఖ్యను కనుగొనుటకు అవసరమయ్యే సమీకరణమును కనుగొనుము .

సాధన : మొత్తం గోళీల సంఖ్య =45

రాజు వద్ద గల గోళీల సంఖ్య = x అనుకొనుము

రాజేందర్ వద్ద గల గోళీల సంఖ్య = $45 - x$

ఇద్దరూ చెరి 5 గోళీలను పోగొట్టుకున్న తరువాత

రాజు వద్ద గల గోళీల సంఖ్య = $x - 5$

రాజేందర్ వద్ద గల గోళీల సంఖ్య = $45 - x - 5 = 40 - x$

BALABHADRA SURESH

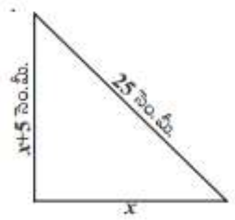
మిగిలిన గోళీల సంఖ్యల యొక్క లబ్ధము =124

$\Rightarrow\ (x-5)(40-x)=124$
$\Rightarrow 40x-x^2-200+5x=124$
$\Rightarrow -x^2+45x-200-124=0$
$\Rightarrow -x^2+45x-324=0$
$\Rightarrow x^2-45x+324=0$ (-1 చే గుణించగా)

ii. ఒక లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క కర్ణము 25 సెం. మీ. మిగిలిన రెండు భుజాల పొడవుల భేదము 5 సెం. మీ. అని ఇవ్వబడింది .అయిన మిగిలిన రెండు భుజాల పొడవులను కనుగొనుటకు అవసరమయ్యే సమీకరణమును రాయుము ?

సాధన :చిన్న భుజము యొక్క పొడవు $= x$ సెం. మీ. అనుకొనుము

పెద్ద భుజం పొడవు $=(x+5)$సెం. మీ.



కర్ణము యొక్క పొడవు $=25$ సెం. మీ

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

(భుజము $)^2$ + (భుజము$)^2$ = (కర్ణము$)^2$

$(x)^2+(x+5)^2=(25)^2$

$x^2+x^2+2\times x\times 5+5^2=625$

$2x^2+10x+25-625=0$

$2x^2+10x+-600=0$
$x^2+5x-300=0$
కావలసిన వర్గసమీకరణం : $x^2+5x-300$

BALABHADRA SUR

ఉదాహరణ -2. కిందివి వర్గసమీకరణలేమో పరిశీలించండి

i. $(x-2)^2+1=2x-3$

సాధన : $(x-2)^2+1=2x-3$

$\Rightarrow x^2-4x+4+1-2x+3=0$
$\Rightarrow x^2-6x+8=0$
ఇచ్చిన సమీకరణం ఒక వర్గ సమీకరణం

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

ii. $x(x+1)+8=(x+2)(x-2)$

సాధన: $x(x+1)+8=(x+2)(x-2)$

$\Rightarrow x^2+x+8=x^2-2^2$
$\Rightarrow x^2+x+8-x^2+4=0$
$\Rightarrow x+12=0$
ఇచ్చిన సమీకరణం ఒక వర్గ సమీకరణం కాదు

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

iii. $x(2x+3) = x^2+1$

సాధన: $x(2x+3) = x^2+1$

$\Rightarrow 2x^2 + 3x - x^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 1 = 0$

ఇచ్చిన సమీకరణం ఒక వర్గ సమీకరణం

iv. $(x+2)^3 = x^3 - 4$

సాధన: $(x+2)^3 = x^3 - 4$

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$\Rightarrow x^3 + 2^3 + 3 \times x \times 2(x+2) = x^3 - 4$

$\Rightarrow x^3 + 8 + 6x(x+2) = x^3 - 4$

$\Rightarrow x^3 + 8 + 6x^2 + 12x - x^3 + 4 = 0$

$\Rightarrow 6x^2 + 12\mathrm{x} + 12 = 0$

ఇచ్చిన సమీకరణం ఒక వర్గ సమీకరణం

అభ్యాసము - 5.1

1. క్రింది సమీకరణలు వర్గసమీకరణాలు అవునో , కాదో నిర్ణయించండి :

i. $(x+1)^2 = 2(x-3)$

సాధన: $(x+1)^2 = 2(x-3)$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x - 6$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 - 2x + 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 7 = 0$

ఇచ్చిన సమీకరణం ఒక వర్గ సమీకరణం

ii. $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$

సాధన: $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$

$\Rightarrow x^2 - 2x = -6 + 2x$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 6 - 2x = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0$

ఇచ్చిన సమీకరణం ఒక వర్గ సమీకరణం

iii. $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$

సాధన: $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$

$\Rightarrow x^2 + x - 2x - 2 = x^2 + 3x - x - 3$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = x^2 + 2x - 3$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 - x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Rightarrow -3x + 1 = 0$

ఇచ్చిన సమీకరణం ఒక వర్గ సమీకరణం కాదు .

iv. $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

సాధన: $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

$\Rightarrow 2x^2 + x - 6x - 3 = x^2 + 5x$

$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 - x^2 - 5x = 0$

$\Rightarrow x^2 - 10x - 3 = 0$ ఇచ్చిన సమీకరణం ఒక వర్గ సమీకరణం

BALABHADRA SURESH

v. $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$

సాధన: $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$

$\Rightarrow 2x^2 - 6x - x + 3 = x^2 - x + 5x - 5$
$\Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 = x^2 + 4x - 5$
$\Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 - x^2 - 4x + 5 = 0$
$\Rightarrow x^2 - 11x + 8 = 0$

ఇచ్చిన సమీకరణం ఒక వర్గ సమీకరణం .

vi. $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$

సాధన: $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$

$\Rightarrow x^2 + 3x + 1 = x^2 - 4x + 4$
$\Rightarrow x^2 + 3x + 1 - x^2 + 4x - 4 = 0$
$\Rightarrow 7x - 3 = 0$

ఇచ్చిన సమీకరణం ఒక వర్గ సమీకరణం కాదు .

vii. $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$

సాధన: $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$

$\Rightarrow x^3 + 2^3 + 3 \times x \times 2(x+2) = 2x^3 - 2x$
$\Rightarrow x^3 + 8 + 6x(x+2) = 2x^3 - 2x$
$\Rightarrow x^3 + 8 + 6x^2 + 12x - 2x^3 + 2x = 0$
$\Rightarrow -x^3 + 6x^2 + 14x + 8 = 0$

ఇచ్చిన సమీకరణం ఒక వర్గ సమీకరణం కాదు .

viii. $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

సాధన: $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 1 = x^3 - 2^3 - 3 \times x \times 2(x-2)$
$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 1 = x^3 - 8 - 6x^2 + 12x$
$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 1 - x^3 + 8 + 6x^2 - 12x = 0$
$\Rightarrow 2x^2 - 13x + 9 = 0$ ఇచ్చిన సమీకరణం ఒక వర్గ సమీకరణం

2. i. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము యొక్క వైశాల్యము 528 చ. మీ. దీని పొడవు వెడల్పు యొక్క రెట్టింపుకంటే ఒక మీటరు ఎక్కువ . అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుటకు అవసరమైన వర్గ సమీకరణమును కనుగొనుము .

సాధన: దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము యొక్క వెడల్పు $(b) = x$ మీ. అనుకొనుము

దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము యొక్క పొడవు $(l) = (2x+1)$మీ.

దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము యొక్క వైశాల్యము $= 528$ మీ ^{2}

$$l \times b = 528$$
$$(2x+1) \times x = 528$$
$$2x^2 + x - 528 = 0$$

కావలసిన వర్గసమీకరణం $2x^2 + x - 528 = 0$.

BALABHADRA SURESH

ii. రెండు వరుస ధన పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం 306. అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుటకు అవసరమయ్యే వర్గ సమీకరణమును కనుగొనుము .

సాధన: రెండు వరుస ధన పూర్ణ సంఖ్యలు $x, x+1$

వాటి లబ్ధం $= 306$

$x \times (x+1) = 306 \Longrightarrow x^2 + x - 306 = 0$

కావలసిన వర్గసమీకరణం : $x^2 + x - 306 = 0$

iii. రోహన్ తల్లి, రోహన్ కంటే 26 సం . లు పెద్దది .3 సం. ల తరువాత వారిద్దరి వయస్సుల లబ్ధం 360. అయిన రోహన్ యొక్క ప్రస్తుత వయస్సును కనుగొనుటకు అవసరమయ్యే వర్గ సమీకరణమును కనుగొనుము .

సాధన: రోహన్ యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు $=x$ సం. లు అనుకొనుము

రోహన్ తల్లి యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు $=(x+26)$సం. లు

3 సం IIలు తరువాత

రోహన్ యొక్క వయస్సు $=(x+3)$ సం IIలు

రోహన్ తల్లి యొక్క వయస్సు $=(x+26+3) = (x+29)$సం IIలు

3 సం. ల తరువాత వారిద్దరి వయస్సుల లబ్ధం $=360$ సం IIలు

$\Rightarrow (x+3)(x+29) = 360$

$\Rightarrow x^2 + 29x + 3x + 87 - 360 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 32x - 273 = 0$

కావలసిన వర్గసమీకరణం : $x^2 + 32x - 273 = 0$

iv. 480 కి.మీ దూరమును ఒక రైలు ఏకరీతి వేగముతో ప్రయాణిస్తుంది. ఒకవేళ ఇదేరైలు ఇప్పటి వేగం కంటే 8 కి. మీ/గం తక్కువ వేగముతో ప్రయాణిస్తే గమ్యము చేరుటకు పట్టే కాలం 3 గం.లు పెరుగు తుంది అయిన రైలు వేగము కనుగొనుటకు కావలసిన వర్గ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: రైలు ఏకరీతి వేగము$= x$ కి. మీ/గం అనుకొనుము

ప్రయాణించిన దూరం $= 480$ కి. మీ

కాలం $(T_1) = \frac{\text{దూరం}}{\text{వేగము}} = \frac{480}{x}$ గం

ఇప్పటి వేగం కంటే 8 కి. మీ/గం తగ్గిన తరువాత వేగము $=(x-8)$ కి. మీ/గం

కాలం $(T_2) = \frac{\text{దూరం}}{\text{వేగము}} = \frac{480}{x-8}$గం

కాలముల మధ్య భేదం $=3$ గం

$$\frac{480}{x-8} - \frac{480}{x} = 3$$

BALABHADRA SURESH

$$480\left(\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x}\right)=3$$
$$\frac{x-(x-8)}{x(x-8)}=\frac{3}{480}$$
$$\frac{x-x+8}{x^2-8x}=\frac{1}{160}$$
$$\frac{8}{x^2-8x}=\frac{1}{160}$$
$$x^2-8x=160\times 8$$
$$x^2-8x=1280$$
$$x^2-8x-1280=0$$

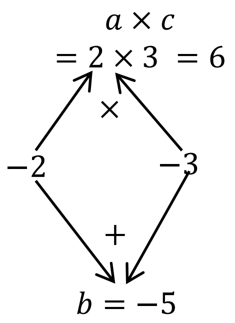
రైలు వేగము కనుగొనుటకు కావలసిన వర్గ సమీకరణమున: $x^2-8x-1280=0$

కరణాంక పద్ధతిన వర్గసమీకరణమును సాధించుట

$ax^2+bx+c=0$: $a\neq 0$ కు $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ అయిన α ను వర్గసమీకరణం యొక్క మూలము అంటాం.

ఉదాహరణ -3. కారణాంక పద్ధతిన $2x^2-5x+3=0$ యొక్క మూలాలను కనుగొనుము .

సాధన: $2x^2-5x+3=0$



$$2x^2-2x-3x+3=0$$
$$2x(x-1)-3(x-1)=0$$
$$(x-1)(2x-3)=0$$
$x-1=0$ లేదా $2x-3=0$

$x=1$ లేదా $x=\frac{3}{2}$

$\therefore$ $2x^2-5x+3=0$ యొక్క మూలాలు 1 మరియు $\frac{3}{2}$.

1 మరియు $\frac{3}{2}$ లు $2x^2-5x+3=0$ యొక్క మూలాలవుతాఏమో సరిచూడండి .

సాధన : $P(x)=2x^2-5x+3$

$$P(1)=2(1)^2-5(1)+3$$
$$=2-5+3$$
$$=5-5=0$$
$$P\left(\frac{3}{2}\right)=2\left(\frac{3}{2}\right)^2-5\left(\frac{3}{2}\right)+3$$
$$=2\times\frac{9}{4}-5\times\frac{3}{2}+3$$
$$=\frac{9}{2}-\frac{15}{2}+3=\frac{-6}{2}+3=-3+3=0$$

$P(1)=0$ మరియు $P\left(\frac{3}{2}\right)=0$.

కావున 1 మరియు $\frac{3}{2}$ లు $2x^2-5x+3=0$ యొక్క మూలాలవుతాయి.

ఉదాహరణ 4 : $x-\frac{1}{3x}=\frac{1}{6}$ వర్గసమీకరణం యొక్క మూలాలను కనుగొనుము .

BALABHADRA SURESH

సాధన : $x - \frac{1}{3x} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow \frac{3x^2 - 1}{3x} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow 6(3x^2 - 1) = 3x \times 1$

$\Rightarrow 18x^2 - 3x - 6 = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 4x + 3x - 2 = 0$

$\Rightarrow 2x(3x - 2) + 1(3x - 2) = 0$

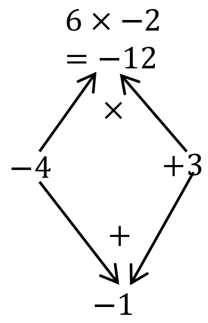
$\Rightarrow (3x - 2)(2x + 1) = 0$

$\Rightarrow 3x - 2 = 0$ లేదా $2x + 1 = 0$

$3x = 2$ లేదా $2x = -1$

$x = \frac{2}{3}$ లేదా $x = \frac{-1}{2}$

$\therefore\ x - \frac{1}{3x} = \frac{1}{6}$ యొక్క మూలాలు $\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{-1}{2}$



అభ్యాసము- 5.2

1. కరణాంక పద్ధతిన క్రింది వర్గ సమీకరణాల మూలాలను కనుగొనుము .

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$

సాధన : $x^2 - 3x - 10 = 0$

$x^2 - 2x + 5x - 10 = 0$

$x(x - 2) + 5(x - 2) = 0$

$(x - 2)(x + 5) = 0$

$x - 2 = 0$ లేదా $x + 5 = 0$

$x = 2$ లేదా $x = -5$

$x^2 - 3x - 10 = 0$ యొక్క మూలాలు 2 మరియు -5

(ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

సాధన: $2x^2 + x - 6 = 0$

$2x^2 - 3x + 4x - 6 = 0$

$x(2x - 3) + 2(2x - 3) = 0$

$(2x - 3)(x + 2) = 0$

$2x - 3 = 0$ లేదా $x + 2 = 0$

$x = \frac{3}{2}$ లేదా $x = -2$

$\therefore 2x^2 + x - 6 = 0$ యొక్క మూలాలు $\frac{3}{2}$ మరియు -2

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

సాధన : $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 5 \times 2 = 10$
$2 \times 5 = 10$
$2 + 5 = 7$

$\sqrt{2}x^2 + 2x + 5x + 5\sqrt{2} = 0$

$\sqrt{2}x(x + \sqrt{2}) + 5(x + \sqrt{2}) = 0$

$(x + \sqrt{2})(\sqrt{2}x + 5) = 0$

$x + \sqrt{2} = 0$ లేదా $\sqrt{2}x + 5 = 0$

BALABHADRA SURESH

$x = -\sqrt{2}$ లేదా $x = \frac{-5}{\sqrt{2}}$

$\therefore \sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ యొక్క మూలాలు $-\sqrt{2}$ మరియు $\frac{-5}{\sqrt{2}}$

(iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

సాధన: $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

సమీకరణాన్ని '8' చే గుణించగా

$8 \times 2x^2 - 8 \times x + 8 \times \frac{1}{8} = 8 \times 0$

$16x^2 - 8x + 1 = 0$

$16x^2 - 4x - 4x + 1 = 0$

$4x(4x - 1) - 1(4x - 1) = 0$

$(4x - 1)(4x - 1) = 0$

$4x - 1 = 0$ లేదా $4x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{4}$ లేదా $x = \frac{1}{4}$

$\therefore 2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$ యొక్క మూలాలు $\frac{1}{4}$ మరియు $\frac{1}{4}$.

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

సాధన: $100x^2 - 20x + 1 = 0$

$100x^2 - 10x - 10x + 1 = 0$

$10x(10x - 1) - 1(10x - 1) = 0$

$(10x - 1)(10x - 1) = 0$

$10x - 1 = 0$ లేదా $10x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{10}$ లేదా $x = \frac{1}{10}$

$\therefore 100x^2 - 20x + 1 = 0$ యొక్క మూలాలు $\frac{1}{10}$ మరియు $\frac{1}{10}$

(vi) $x(x + 4) = 12$

సాధన: $x(x + 4) = 12$

$x^2 + 4x - 12 = 0$

$x^2 - 2x + 6x - 12 = 0$

$x(x - 2) + 6(x - 2) = 0$

$(x - 2)(x + 6) = 0$

$x - 2 = 0$ లేదా $x + 6 = 0$

$x = 2$ లేదా $x = -6$

$\therefore x(x + 4) = 12$ యొక్క మూలాలు 2 మరియు -6.

(vii) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

సాధన: $3x^2 - 5x + 2 = 0$

$3x^2 - 3x - 2x + 2 = 0$

$3x(x - 1) - 2(x - 1) = 0$

$(x - 1)(3x - 2) = 0$

$x - 1 = 0$ లేదా $3x - 2 = 0$

BALABHADRA SURESH

$x = 1$ లేదా $x = \frac{2}{3}$

$\therefore 3x^2 - 5x + 2 = 0$ యొక్క మూలాలు 1 మరియు $\frac{2}{3}$.

(viii) $x - \frac{3}{x} = 2$

సాధన: $x - \frac{3}{x} = 2$

$$\frac{x^2 - 3}{x} = 2$$
$$x^2 - 3 = 2x$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$x^2 - 3x + 1x - 3 = 0$$
$$x(x - 3) + 1(x - 3) = 0$$
$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$x - 3 = 0$ లేదా $x + 1 = 0$

$x = 3$ లేదా $x = -1$

$\therefore x - \frac{3}{x} = 2$ యొక్క మూలాలు 3 మరియు -1

(ix) $3(x - 4)^2 - 5(x - 4) = 12$

సాధన: $3(x - 4)^2 - 5(x - 4) = 12$

$$3(x^2 - 8x + 16) - 5x + 20 - 12 = 0$$
$$3x^2 - 24x + 48 - 5x + 8 = 0$$
$$3x^2 - 29x + 56 = 0$$
$$3x^2 - 21x - 8x + 56 = 0$$
$$3x(x - 7) - 8(x - 7) = 0$$
$$(x - 7)(3x - 8) = 0$$

$x - 7 = 0$ లేదా $3x - 8 = 0$

$x = 7$ లేదా $x = \frac{8}{3}$

$\therefore 3(x - 4)^2 - 5(x - 4) = 12$ యొక్క మూలాలు 7 మరియు $\frac{8}{3}$.

2. మొత్తము 27, లబ్ధం 182 అయ్యే విధంగా రెండు సంఖ్యలను కనుగొనుము .

సాధన: మొదటి సంఖ్య $= x$ అనుకొనుము . రెండవసంఖ్య $= 27 - x$

రెండు సంఖ్యల లబ్ధం =182

$$x(27 - x) = 182$$
$$27x - x^2 = 182$$
$$-x^2 + 27x - 182 = 0$$
$$x^2 - 27x + 182 = 0$$
$$x^2 - 13x - 14x + 182 = 0$$
$$x(x - 13) - 14(x - 13) = 0$$
$$(x - 13)(x - 14) = 0$$

$x - 13 = 0$ లేదా $x - 14 = 0$

$x = 13$ లేదా $x = 14$

$x = 13$ అయిన కావలసిన సంఖ్యలు 13 మరియు 14.

BALABHADRA SURESH

$x = 14$ అయిన కావలసిన సంఖ్యలు 14 మరియు 13.

3. రెండు వరుస ధన పూర్ణ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తం 613అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము .

సాధన : రెండు వరుస ధన పూర్ణ సంఖ్యలు $x, x+1$.

వాటి వర్గాల మొత్తం $= 613$

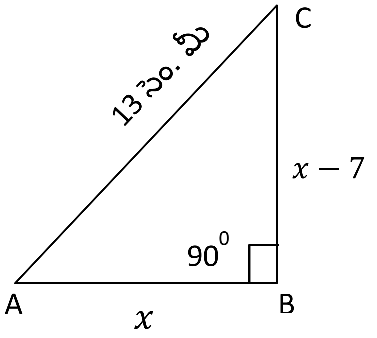
$$x^2 + (x+1)^2 = 613$$
$$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 613 = 0$$
$$2x^2 + 2x - 612 = 0$$
$$x^2 + x - 306 = 0$$
$$x^2 - 17x + 18x - 306 = 0$$
$$x(x-17) + 18(x-17) = 0$$
$$(x-17)(x+18) = 0$$

$x = 17$ లేదా $x = -18$

$\therefore x = 17$ (x ధన పూర్ణ సంఖ్య కావున $x \neq -18$)

కావలసిన ధన పూర్ణ సంఖ్యలు 17 , 18.

4. ఒక లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క ఎత్తు దాని భూమి కంటే 7 సెం. మీ. తక్కువ . కర్ణము పొడవు 13 సెం. మీ. అయిన మిగిలిన రెండు భుజాలను కనుగొనుము.



సాధన : లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క భూమి (AB)=x సెం. మీ

లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క ఎత్తు (BC) =$(x-7)$సెం. మీ

కర్ణము పొడవు (AC)= 13 సెం. మీ

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$
$$x^2 + (x-7)^2 = 13^2$$
$$x^2 + x^2 - 14x + 49 - 169 = 0$$
$$2x^2 - 14x - 120 = 0$$
$$x^2 - 7x - 60 = 0$$
$$x^2 - 12x + 5x - 60 = 0$$
$$x(x-12) + 5(x-12) = 0$$
$$(x-12)(x+5) = 0$$

$x - 12 = 0$ లేదా $x + 5 = 0$

$x = 12$ లేదా $x = -5$

$\therefore x = 12$ (భుజము ఋణసంఖ్య కాదు $x \neq -5$)

మిగిలిన రెండు భుజాలు 12 సెం. మీ, (12-7) సెం. మీ అనగా 12 సెం. మీ , 5 సెం. మీ.

5. ఒక కుటీర పరిశ్రమలో ప్రతిరోజూ ఒక నియమిత సంఖ్యలో వస్తువులు తయారు చేస్తారు. ఒక రోజు తయారైన ఒక్కొక్క వస్తువు ఖరీదు ఆరోజు తయారైన వస్తువుల సంఖ్యకు రెట్టింపు కంటే 3ఎక్కువ. ఆ రోజు తయారైన మొత్తం వస్తువుల ఖరీదు ₹ 90 అయిన ఆ రోజు తయారైన మొత్తం వస్తువుల సంఖ్య మరియు ఒక్కొక్క

వస్తువు ఖరీదును కనుగొనుము?

సాధన : ఒక రోజు తయారైన వస్తువుల సంఖ్య$=x$

ఒక్కొక్క వస్తువు ఖరీదు =₹ $(2x+3)$

ఒక రోజు తయారైన మొత్తం వస్తువుల ఖరీదు =₹ 90

$x(2x+3)=90$
$2x^2+3x-90=0$
$2x^2-12x+15x-90=0$
$2x(x-6)+15(x-6)=0$
$(x-6)(2x+15)=0$
$x-6=0$ లేదా $2x+15=0$
$x=6$ లేదా $x=\frac{-15}{2}$
$\therefore\ x=6$ (వస్తువుల సంఖ్య ఋణాత్మకం కాదు)
ఒక రోజు తయారైన వస్తువుల సంఖ్య $=x=6$

ఒక్కొక్క వస్తువు ఖరీదు =₹ $(2x+3)=Rs\ (2\times 6+3)=$ ₹ 15.

6. ఒక దీర్ఘ చతురస్రము యొక్క చుట్టుకొలత 28 మీ. మరియు దాని వైశాల్యం 40 చ. మీ. అయిన దీర్ఘచతురస్రము యొక్క కొలతలను కనుగొనుము .

సాధన : దీర్ఘ చతురస్రము యొక్క పొడవు $=l$, వెడల్పు $=b$

దీర్ఘ చతురస్రము యొక్క చుట్టుకొలత =28 మీ.

$2(l+b)=28$
$\Rightarrow l+b=\frac{28}{2}\Rightarrow l+b=14\Rightarrow b=14-l$
దీర్ఘ చతురస్రము వైశాల్యం =40 చ. మీ..

$\Rightarrow l\times b=40$
$\Rightarrow l(14-l)=40$
$\Rightarrow 14l-l^2-40=0$
$\Rightarrow -l^2+14l-40=0$
$\Rightarrow l^2-14l+40=0$
$\Rightarrow l^2-10l-4l+40=0$
$\Rightarrow l(l-10)-4(l-10)=0$
$\Rightarrow (l-10)(l-4)=0$
$\Rightarrow l-10=0\quad or\quad l-4=0$
$\Rightarrow l=10\quad or\quad l=4$
$l=10$ మీ అయిన $b=14-10=4$ మీ
$l=4$ మీ అయిన $b=14-4=10$ మీ
దీర్ఘచతురస్రము యొక్క కొలతలు 10 మీ మరియు 4 మీ .

BALABHADRA SURESH

7. ఒక త్రిభుజం యొక్క భూమి, దాని ఎత్తు కంటే 4 సెం. మీ. ఎక్కువ. ఈ త్రిభుజ వైశాల్యం 48 చ. సెం. మీ అయిన దాని భూమిని, ఎత్తును కనుగొనుము.

సాధన : త్రిభుజం యొక్క ఎత్తు (h)=x

త్రిభుజం యొక్క భూమి (b)=$(x+4)$

త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం = 48 చ. సెం. మీ

$$\frac{1}{2}\times b\times h=48$$
$$(x+4)\times x=48\times 2$$
$$x^2+4x-96=0$$
$$x^2-8x+12x-96=0$$
$$x(x-8)+12(x-8)=0$$
$$(x-8)(x+12)=0$$
$x-8=0$ లేదా $x+12=0$

$x=8$ లేదా $x=-12$

$\therefore x=8$ (త్రిభుజం ఎత్తు ఋణాత్మకం కాదు)

త్రిభుజం యొక్క ఎత్తు $=x=8$ సెం.మీ

త్రిభుజం యొక్క భూమి $=x+4=8+4=12$ సెం.మీ..

8. రెండు రైళ్లు ఒక స్టేషన్ నుంచి ఒకే సమయంలో ఒక పడమరకు మరి ఒకటి ఉత్తరం వైపుకు బయలు దేరును. మొదటి రైలు, రెండవ రైలు కంటే 5 కి. మీ/గంట ఎక్కువ వేగంతో ప్రయాణిస్తుంది. అవి బయలు దేరిన రెండు గంటల తరువాత ఒకదనికొకటి 50 కి. మీ దూరంలో ఉన్న ఒక్కొక్క రైలు సగటు వేగం ఎంత.

సాధన: రెండవ రైలు సగటు వేగం $=x$ కి.మీ/గంట అనుకొనుము

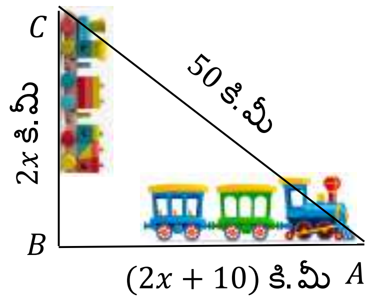
మొదటి రైలు సగటు వేగం $=(x+5)$కి.మీ/గంట

కాలము (t)=2 గం.

రెండవ రైలు ప్రయాణించిన దూరం $=s\times t=2\times x=2x$ కి.మీ

మొదటి రైలు ప్రయాణించిన దూరం $=s\times t=2\times(x+5)=(2x+10)$కి.మీ

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం



$$AB^2+BC^2=AC^2$$
$$(2x+10)^2+(2x)^2=50^2$$
$$4x^2+40x+100+4x^2=2500$$
$$8x^2+40x+100-2500=0$$
$$8x^2+40x-2400=0$$
$x^2+5x-300=0$ (8 చే భాగించగా)

$$x^2-15x+20x-300=0$$
$$x(x-15)+20(x-15)=0$$
$$(x-15)(x+20)=0$$

BALABHADRA SURESH

$x-15=0$ లేదా $x+20=0$
$x=15$ లేదా $x=-20$
$\therefore x=15$ (రైలు వేగం ఋణాత్మకం కాదు)
రెండవ రైలు సగటు వేగం =15 కి. మీ/గంట .

మొదటి రైలు సగటు వేగం =(15+5) =20 కి. మీ/గంట

9. '60 మంది విద్యార్థులు గల తరగతిలో ప్రతి అబ్బాయి, అమ్మాయిల సంఖ్యకు సమానమైన సొమ్మును, ప్రతి అమ్మాయి, అబ్బాయిల సంఖ్యకు సమానమైన సొమ్మును చందాగా ఇచ్చారు. మొత్తం వసూలైన సొమ్ము '₹ 1600 అయిన తరగతిలో ఎంత మంది అబ్బాయిలు గలరు ?

సాధన : మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య =60

అబ్బాయిల సంఖ్య $=x$ అనుకొనుము

అమ్మాయిల సంఖ్య $=60-x$

అబ్బాయిలు ఇచ్చిన చందా $=x\times(60-x)=60x-x^2$

అమ్మాయిలు ఇచ్చిన చందా $=(60-x)\times x=60x-x^2$

మొత్తం వసూలైన సొమ్ము=₹1600

$60x-x^2+60x-x^2=1600$
$-2x^2+120x-1600=0$
$x^2-60x+800=0$ ('-2'చే బయగించగా)
$x^2-40x-20x+800=0$
$x(x-40)-20(x-40)=0$
$(x-40)(x-20)=0$
$x-40=0$ or $x-20=0$
$x=40$ or $x=20$
$\therefore$ అబ్బాయిల సంఖ్య =40 or 20.

10. గంటకు 3 కి.మీ వేగంతో ప్రయాణిస్తున్న ఒక నదిలో ఒక మోటారు బోటు 24కి. మీ. దూరమును ప్రయాణించి తిరిగి బయలుదేరిన స్థానానికి రావడానికి పట్టిన కాలం 6 గంటలైన బోటు స్థిరవేగంలో ప్రయాణించినదని భావించి దాని వేగమును కనుగొనుము?

Sol: బోటు వేగము $=x$ కి. మీ /గం అనుకొనుము

నది వేగము =3 కి. మీ /గం

ప్రతిసారీ బోటు ప్రయాణించిన దూరం =24 కి. మీ

నీటి ప్రవాహమునకు ఎదురుగా పోవునపుడు బోటు వేగము $=(x-3)$ కి. మీ /గం

నీటి ప్రవాహమునకు ఎదురుగా పోవునపుడు పట్టే కాలం $(T1)=\frac{\text{దూరము}}{\text{వేగం}}=\frac{24}{x-3}$ గం

తిరుగు ప్రయాణం లో బోటు వేగము $=(x+3)$కి. మీ/గం

BALABHADRA SURESH

తిరుగు ప్రయాణానికి పట్టే కాలం $(T1) = \frac{\text{దూరము}}{\text{వేగం}} = \frac{24}{x+3}$ గం

మొత్తం ప్రయాణానికి పట్టే కాలం =6 గం

$$\frac{24}{x-3} + \frac{24}{x+3} = 6$$
$$24\left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3}\right) = 6$$
$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} = \frac{6}{24}$$
$$\frac{x+3+x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{4}$$
$$\frac{2x}{x^2-9} = \frac{1}{4}$$
$$x^2 - 9 = 4 \times 2x$$
$$x^2 - 8x - 9 = 0$$
$$x^2 - 9x + 1x - 9 = 0$$
$$x(x-9) + 1(x-9) = 0$$
$$(x-9)(x+1) = 0$$

$x - 9 = 0$ లేదా $x + 1 = 0$

$x = 9$ లేదా $x = -1$

$\therefore x = 9$ (బోటు వేగము ఋణాత్మకం కాదు)

బోటు వేగము = 9 కి. మీ /గం .

వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా వర్గ సమీకరణమును సాధించుట

ఉదాహరణ : $3x^2 - 5x + 2 = 0$ ను వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా సాధించుము .

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణం $3x^2 - 5x + 2 = 0$

ఇరువైపులా 3 చే భాగించగా

$$\frac{3x^2}{3} - \frac{5x}{3} + \frac{2}{3} = 0$$
$$x^2 - \frac{5x}{3} = -\frac{2}{3}$$
$$x^2 - 2 \times x \times \frac{5}{6} = -\frac{2}{3}$$

ఇరువైపులా $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ ను కూడగా

$$x^2 - 2 \times x \times \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{2}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$$
$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{2}{3} + \frac{25}{36}$$
$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{(12 \times -2) + 25}{36}$$
$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-24 + 25}{36}$$

BALABHADRA SURESH

$$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{-24+25}{36}$$
$$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$$
$$x-\frac{5}{6}=\sqrt{\frac{1}{36}}$$
$$x-\frac{5}{6}=\pm\frac{1}{6}$$
$$x=\frac{5}{6}+\frac{1}{6} \quad \text{లేదా} \quad \frac{5}{6}-\frac{1}{6}$$
$$x=\frac{6}{6} \quad \text{లేదా} \quad \frac{4}{6}$$
$$x= \ 1 \quad \text{లేదా} \quad \frac{2}{3}$$

ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణ మూలాలు 1 మరియు $\frac{2}{3}$

ఉదాహరణ -6. వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా వర్గ సమీకరణమును సాధించే పద్ధతి ద్వారా

$5x^2-6x-2=0$ ను సాధించుము .

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణం $5x^2-6x-2=0$

ఇరువైపులా 5 చే భాగించగా

$$\frac{5x^2}{5}-\frac{6x}{5}-\frac{2}{5}=0$$
$$x^2-\frac{6x}{5}=\frac{2}{5}$$
$$x^2-2\times x\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

ఇరువైపులా $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ ను కలుపగా

$$x^2-2\times x\times\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{2}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2$$
$$\left(x-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{2}{5}+\frac{9}{25}$$
$$\left(x-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{(2\times 5)+9}{25}$$
$$\left(x-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{10+9}{25}$$
$$\left(x-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{19}{25}$$
$$x-\frac{3}{5}=\pm\frac{\sqrt{19}}{5}$$
$$x=\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{19}}{5} \quad \text{లేదా} \quad \frac{3}{5}-\frac{\sqrt{19}}{5}$$
$$x=\frac{3+\sqrt{19}}{5} \text{లేదా} \quad \frac{3-\sqrt{19}}{5}$$

BALABHADRA SURESH

$5x^2 - 6x - 2 = 0$ యొక్క మూలాలు $\frac{3+\sqrt{19}}{5}$ మరియు $\frac{3-\sqrt{19}}{5}$

ఉదాహరణ -7. $4x^2 + 3x + 5 = 0$ ను వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా సాధించుము .

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణం $4x^2 + 3x + 5 = 0$

ఇరువైపులా 4 చే భాగించగా

$$\frac{4x^2}{4} + \frac{3x}{4} + \frac{5}{4} = 0$$
$$x^2 + \frac{3x}{4} = -\frac{5}{4}$$
$$x^2 + 2 \times x \times \frac{3}{8} = -\frac{5}{4}$$

ఇరువైపులా $\left(\frac{3}{8}\right)^2$ ను కలుపగా

$$x^2 + 2 \times x \times \frac{3}{8} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = -\frac{5}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2$$
$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = -\frac{5}{4} + \frac{9}{64}$$
$$\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{(-5 \times 16) + 9}{64}$$
$$\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-80 + 9}{64}$$
$$\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-71}{64}$$

$x - \frac{3}{8} = \sqrt{\frac{-71}{64}}$ ఇది వాస్తవ సంఖ్య కాదు .

ఇచ్చిన సమీకరణానికి వాస్తవ మూలాలు లేవు .

ఇవి చేయండి.

వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా క్రింది వర్గ సమీకరణాలను సాధించుము .

(i) $x^2 - 10x + 9 = 0$

సాధన : $x^2 - 10x + 9 = 0$

$$x^2 - 10x = -9$$
$$x^2 - 2 \times x \times 5 = -9$$

ఇరువైపులా 5^2 కలుపగా

$$x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = -9 + 5^2$$
$$(x-5)^2 = -9 + 25$$
$$(x-5)^2 = 16$$
$$x - 5 = \sqrt{16}$$
$$x - 5 = \pm 4$$

$x = 5 + 4$ లేదా $x = 5 - 4$

$x = 9$ లేదా $x = 1$

BALABHADRA SURESH

ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణ మూలాలు 9 మరియు 1.

(ii) $x^2 - 5x + 5 = 0$

సాధన : $x^2 - 5x + 5 = 0$

$$x^2 - 5x = -5$$

$$x^2 - 2 \times x \times \frac{5}{2} = -5$$

ఇరువైపులా $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ ను కలుపగా

$$x^2 - 2 \times x \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -5 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = -5 + \frac{25}{4}$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{-20 + 25}{4} = \frac{5}{4}$$

$$x - \frac{5}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{లేదా} \quad x = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{లేదా} \quad x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణ మూలాలు $\frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ మరియు $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$

(iii) $x^2 + 7x - 6 = 0$

సాధన : $x^2 + 7x - 6 = 0$

$$x^2 + 7x = 6$$

$$x^2 + 2 \times x \times \frac{7}{2} = 6$$

ఇరువైపులా $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ ను కలుపగా

$$x^2 + 2 \times x \times \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 6 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = 6 + \frac{49}{4}$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{24 + 49}{4} = \frac{73}{4}$$

$$x + \frac{7}{2} = \sqrt{\frac{73}{4}}$$

$$x + \frac{7}{2} = \pm\frac{\sqrt{73}}{2}$$

$$x = -\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{73}}{2} \quad \text{లేదా} \quad x = -\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{73}}{2}$$

$$x = \frac{-7 + \sqrt{73}}{2} \quad \text{లేదా} \quad x = \frac{-7 - \sqrt{73}}{2}$$

BALABHADRA SURESH

ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణ మూలాలు $\frac{-7+\sqrt{73}}{2}$ మరియు $\frac{-7-\sqrt{73}}{2}$

వర్గ సూత్రము (వర్గ సమీకరణం మూలాలు కనుగొనుటకు సూత్రము)

$b^2-4ac \geq 0$ అయినపుడు $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలు

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ఉదాహరణ -8: ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము యొక్క వైశాల్యము 528 చ. మీ. దీని పొడవు వెడల్పు యొక్క రెట్టింపుకంటే ఒక మీటరు ఎక్కువ . అయిన ఆ దీర్ఘచతురస్రం కొలతలు కనుగొనుము .

సాధన : దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము యొక్క వెడల్పు $(b) = x$ మీ అనుకొనుము

దాని పొడవు $(l) = (2x+1)$మీ

దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము యొక్క వైశాల్యము $= 528$ మీ ^{2}

$$l \times b = 528$$
$$(2x+1) \times x = 528$$
$$2x^2 + x - 528 = 0 \quad a = 2, b = 1, c = -528$$
$$b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times (-528) = 1 + 4224 = 4225 > 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{2 \times 2}$$
$$x = \frac{-1 \pm 65}{4}$$
$$x = \frac{-1+65}{4} \quad or \quad \frac{-1-65}{4}$$
$$x = \frac{64}{4} \text{ లేదా } \frac{-66}{4}$$
$$x = 16 \text{ లేదా } \frac{-33}{2}$$

$\therefore x = 16$ (వెడల్పు ఋణాత్మకం కాదు)

దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము యొక్క వెడల్పు $= x = 16$ మీ. .

దాని పొడవు $= (2x+1) = 2 \times 16 + 1 = 32 + 1 = 33$మీ .

ఉదాహరణ -9. రెండు వరుస ధన బేసిసంఖ్యల వర్గాల మొత్తం 290 అయిన ఆసంఖ్యలను కనుగొనుము.

సాధన: మొదటి బేసిసంఖ్య $= x$ అనుకొనుము

రెండవ బేసిసంఖ్య $= x + 2$

బేసిసంఖ్యల వర్గాల మొత్తం $= 290$ కావున

$$x^2 + (x+2)^2 = 290$$
$$x^2 + x^2 + 4x + 4 - 290 = 0$$
$$2x^2 + 4x - 286 = 0$$
$$x^2 + 2x - 143 = 0 \quad a = 1, b = 2, c = -143$$

BALABHADRA SURESH

$b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-143) = 4 + 572 = 576 > 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

$$x = \frac{-2 + 24}{2} \quad or \quad \frac{-2 - 24}{2}$$

$$x = \frac{22}{2} \text{ లేదా } \frac{-26}{2}$$

$x = 11$ లేదా -13

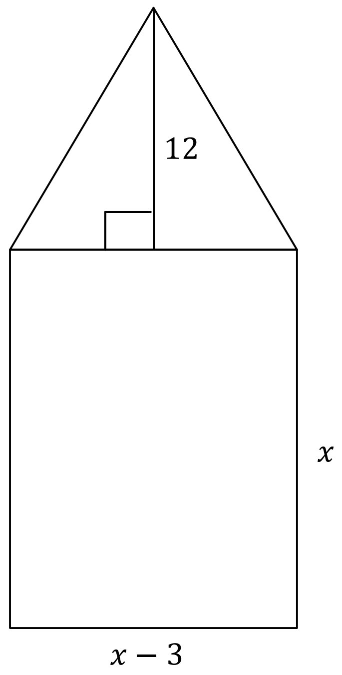
$\therefore x = 11$ (x ఒక ధన సంఖ్య కావున $x \neq -13$)

కావలసిన బేసిసంఖ్యలు 11 మరియు 11+2⇒ 11 మరియు 13

ఉదాహరణ-10. ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార పార్కు తయారు చేయబడుతుంది. దీని వెడల్పు, పొడవు కంటే 3మీ.తక్కువ. దీని వైశాల్యము, దీని వెడల్పుకు సమానమైన భూమి మరియు 12 మీ. ఎత్తు గల ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజవైశాల్యం కంటే 4చమీ. ఎక్కువ. అయిన దీర్ఘచతురస్రాకార పార్కు యొక్క పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము ? (టెక్స్ట్ బుక్ లో కాకుండా వేరే విధంగా చేయడమైనది)

BALABHADRA SURESH

సాధన : దీర్ఘ చతురస్రాకార పార్కు పొడవు $=x$ మీ అనుకొనుము



వెడల్పు $=(x-3)$మీ

పార్కు వైశాల్యం $=x(x-3) = (x^2 - 3x)$ చ.మీ

సమద్విబాహు త్రిభుజం యొక్క భూమి $= (x-3)$ మీ

ఎత్తు (height) =12 మీ

సమద్విబాహు త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం $=\frac{1}{2} \times$ భూమి $\times$ ఎత్తు

$= \frac{1}{2} \times (x-3) \times 12 = (6x - 18)$ చ.మీ

దత్తాంశం ప్రకారం

పార్కు వైశాల్యం = సమద్విబాహు త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం +4

$x^2 - 3x = 6x - 18 + 4$

$x^2 - 3x - 6x + 18 - 4 = 0$

$x^2 - 9x + 14 = 0$

$x^2 - 7x - 2x + 14 = 0$

$(x-7)(x-2) = 0$

$x =$ 7 లేదా 2

$\therefore x = 7$ ($x > 3$ కావున)

దీర్ఘ చతురస్రాకార పార్కు పొడవు $= 7$ మీ మరియు వెడల్పు $= 7 - 3 = 4$ మీ.

ఉదాహరణ -11. క్రింది వర్గ సమీకరణాలకు మూలాలు ఉంటే వానిని సూత్రము ద్వారా కనుగొనుము

(i) $x^2 + 4x + 5 = 0$

సాధన : $a = 1, b = 4, c = 5$

$b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4 < 0$

ఇచ్చిన సమీకరణానికి వాస్తవ మూలాలు లేవు .

(ii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

సాధన : $a = 2, b = -2\sqrt{2}, c = 1$

$b^2 - 4ac = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 8 - 8 = 0$

సమాన వాస్తవ మూలాలు ఉంటాయి

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{2 \times 2} = \frac{2\sqrt{2} \pm 0}{4}$$

$= \frac{2\sqrt{2}+0}{4}$ లేదా $\frac{2\sqrt{2}-0}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4}$ or $\frac{2\sqrt{2}}{4}$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ లేదా $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ లేదా $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ మూలాలు $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ఉదాహరణ -12. క్రింది సమీకరణాల మూలాలను కనుగొనుము :

(i) $x + \frac{1}{x} = 3 \ (x \neq 0)$

సాధన : $x + \frac{1}{x} = 3$

$\frac{x^2+1}{x} = 3$

$x^2 + 1 = 3x$

$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad a = 1, b = -3, c = 1$

$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 9 - 4 = 5 > 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ లేదా $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ మూలాలు $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ మరియు $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

(ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3 \ (x \neq 0,2)$

సాధన : $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3$

$\frac{x-2-x}{x(x-2)} = 3$

$-2 = 3x(x-2)$

$3x^2 - 6x + 2 = 0 : \ a = 3, b = -6, c = 2$

BALABHADRA SURESH

$b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 36 - 24 = 12 > 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2 \times 3} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{2(3 \pm \sqrt{3})}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$x = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$ లేదా $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$

∴ మూలాలు $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ మరియు $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$.

ఉదాహరణ-13. నిశ్చల నీటిలో ఒక మోటారు బోటు యొక్క వేగము గంటకు 18 కి.మీ. నీటి ప్రవాహమునకు, ఎదురుగా 24 కిమీ. ప్రయాణించుటకు పట్టే కాలము, తిరిగి బయలుదేరిన స్థానమునకు వచ్చుటకు పట్టే కాలంకంటే 1 గంట ఎక్కువ. అయిన నీటి వేగమెంత ?

సాధన : నీటి వేగము $= x$ కి. మీ /గం. అనుకొనుము

నిశ్చల నీటిలో మోటారు బోటు యొక్క వేగము $= 18$ కి. మీ /గం

నీటి ప్రవాహమునకు ఎదురుగా పోవునపుడు బోటు వేగము $= (18 - x)$ కి. మీ /గం

నీటి ప్రవాహమునకు ఎదురుగా పోవునపుడు పట్టే కాలం $= \frac{\text{దూరము}}{\text{వేగము}} = \frac{24}{18 - x}$ గం

నీటి ప్రవాహ దిశలో పోవునపుడు బోటు వేగము $= (18 + x)$ కి. మీ /గం

నీటి ప్రవాహ దిశలో పోవునపుడు పట్టే కాలం $= \frac{\text{దూరము}}{\text{వేగము}} = \frac{24}{18 + x}$ గం

దత్తాంశం ప్రకారం

$$\frac{24}{18 - x} - \frac{24}{18 + x} = 1$$

$$24\left(\frac{18 + x - 18 + x}{(18 - x)18 + x}\right) = 1$$

$$\frac{2x}{324 - x^2} = \frac{1}{24}$$

$2x \times 24 = 324 - x^2$

$x^2 + 48x - 324 = 0$; $a = 1, b = 48, c = -324$:

$b^2 - 4ac = (48)^2 - 4 \times 1 \times (-324) = 2304 + 1296 = 3600 > 0$

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2 \times 1} = \frac{-48 \pm 60}{2}$$

$x = \frac{-48 + 60}{2}$ లేదా $\frac{-48 - 60}{2}$

$x = \frac{12}{2}$ లేదా $\frac{-108}{2}$

$x = 6$ లేదా -54

వేగము ఋణాత్మకం కాదు కావున $x = 6$

∴ నీటి ప్రవాహం యొక్క వేగం $= 6$ కి. మీ /గం

BALABHADRA SURESH

అభ్యాసము - 5.3

1. క్రింది సమీకరణాలకు మూలాలు ఉంటే వాటిని వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా కనుగొనుము :

(i) $2x^2 + x - 4 = 0$

సాధన : $2x^2 + x - 4 = 0$

2 చే భాగించగా

$$\frac{2x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{4}{2} = 0$$

$$x^2 + \frac{x}{2} = 2$$

$$x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{4} = 2$$

ఇరువైపులా $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ కలుపగా

$$x^2 + 2 \times x\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = 2 + \frac{1}{16}$$

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{33}{4}$$

$$x + \frac{1}{4} = \pm\sqrt{\frac{33}{4}}$$

$$x + \frac{1}{4} = \pm\frac{\sqrt{33}}{4}$$

$x = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}$ లేదా $x = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}$

$x = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}$ లేదా $x = \frac{-1 - \sqrt{33}}{4}$

$2x^2 + x - 4 = 0$ యొక్క మూలాలు $\frac{-1 + \sqrt{33}}{4}$ మరియు $\frac{-1 - \sqrt{33}}{4}$

(ii) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

సాధన : $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

4 చే భాగించగా

$$\frac{4x^2}{4} + \frac{4\sqrt{3}x}{4} + \frac{3}{4} = 0$$

$$x^2 + \sqrt{3}x = -\frac{3}{4}$$

$$x^2 + 2 \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{4}$$

ఇరువైపులా $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ ను కలుపగా

$$x^2 + 2 \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

BALABHADRA SURESH

$$\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$$

$$\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$$

$$x+\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$4x^2+4\sqrt{3}x+3=0$ యొక్క మూలాలు $-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(iii) $5x^2-7x-6=0$

సాధన : $5x^2-7x-6=0$

5 చే భాగించగా

$$\frac{5x^2}{5}-\frac{7x}{5}-\frac{6}{5}=0$$

$$x^2-\frac{7x}{5}=\frac{6}{5}$$

$$x^2-2\times x\times\frac{7}{10}=\frac{6}{5}$$

ఇరువైపులా $\left(\frac{7}{10}\right)^2$ కలుపగా

$$x^2-2\times x\times\frac{7}{10}+\left(\frac{7}{10}\right)^2=\frac{6}{5}+\left(\frac{7}{10}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{7}{10}\right)^2=\frac{6}{5}+\frac{49}{100}$$

$$\left(x-\frac{7}{10}\right)^2=\frac{120+49}{4}=\frac{169}{100}$$

$$x-\frac{7}{10}=\pm\sqrt{\frac{169}{100}}$$

$$x-\frac{7}{10}=\pm\frac{13}{10}$$

$x=\frac{7}{10}+\frac{13}{10}$ లేదా $x=\frac{7}{10}-\frac{13}{10}$

$x=\frac{7+13}{10}$ లేదా $x=\frac{7-13}{10}$

$x=\frac{20}{10}=2$ లేదా $x=\frac{-6}{10}=-\frac{3}{5}$

$5x^2-7x-6=0$ యొక్క మూలాలు 2 , $-\frac{3}{5}$.

(iv) $x^2+5=-6x$

సాధన : $x^2-6x+5=0$

$$x^2-6x=-5$$

$$x^2-2\times x\times 3=-5$$

ఇరువైపులా $(3)^2$ కలుపగా

$$x^2-2\times x\times 3+(3)^2=-5+(3)^2$$

$$(x-3)^2=-5+9=4$$

BALABHADRA SURESH

$x-3=\sqrt{4}$

$x-3=\pm 2$

$x=3\pm 2$

$x=3+2$ లేదా $x=3-2$

$x=5$ లేదా $x=1$

$x^2+5=-6x$ యొక్క మూలాలు $5, 1$.

2. సూత్రమును ఉపయోగించి క్రింది వర్గ సమీకరణాల మూలాలను కనుగొనుము .

(i) $2x^2+x-4=0$

సాధన : $a=2, b=1, c=-4$

$$b^2-4ac=(1)^2-4\times 2\times(-4)=1+32=33>0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2\times 2}=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$$

$$x=\frac{-1+\sqrt{33}}{4} \text{ లేదా } \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$$

ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణ మూలాలు $\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$, $\frac{-1-\sqrt{33}}{4}$.

(ii) $4x^2+4\sqrt{3}x+3=0$

సాధన : $a=4, b=4\sqrt{3}, c=3$

$$b^2-4ac=\left(4\sqrt{3}\right)^2-4\times 4\times 3=48-48=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-4\sqrt{3}\pm\sqrt{0}}{2\times 4}$$

$$x=\frac{-4\sqrt{3}}{2\times 4},\frac{-4\sqrt{3}}{2\times 4}$$

$$x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(iii) $5x^2-7x-6=0$

సాధన : $a=5, b=-7, c=-6$

$$b^2-4ac=(-7)^2-4\times 5\times(-6)=49+120=169>0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{169}}{2\times 5}=\frac{7\pm 13}{10}$$

$$x=\frac{7+13}{10} \text{ లేదా } \frac{7-13}{10}$$

$$x=\frac{20}{10} \text{ లేదా } \frac{-6}{10}$$

$$x=2 \text{ లేదా } -\frac{3}{5}$$

(iv) $x^2+5=-6x$

BALABHADRA SURESH

సాధన : $x^2 - 6x + 5 = 0$

$a = 1, b = -6, c = 5$

$b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 36 - 20 = 16 > 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-6 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{-6 + 4}{2} \text{ లేదా } \frac{-6 - 4}{2}$$

$$x = \frac{-2}{2} \text{ లేదా } \frac{-10}{2}$$

$x = -1$ లేదా -5

3. క్రింది సమీకరణాల మూలాలను కనుగొనుము :

(i) $x - \frac{1}{x} = 3\,,\ x \neq 0$

సాధన : $x - \frac{1}{x} = 3$

$$\frac{x^2 - 1}{x} = 3$$

$x^2 - 1 = 3x$

$x^2 - 3x - 1 = 0 \quad a = 1, b = -3, c = -1$

$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 9 + 4 = 13 > 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \text{ లేదా } \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

మూలాలు $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ మరియు $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$.

(ii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}\,, \quad x \neq -4,7$

సాధన : $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}$

$$\frac{x - 7 - x - 4}{(x+4)(x-7)} = \frac{11}{30}$$

$$\frac{-11}{x^2 - 3x - 28} = \frac{11}{30}$$

$$x^2 - 3x - 28 = -11 \times \frac{30}{11}$$

$x^2 - 3x - 28 = -30$

$x^2 - 3x - 28 + 30 = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x - 1)(x - 2) = 0$

$x - 1 = 0$ లేదా $x - 2 = 0$

$x = 1$ లేదా $x = 2$

BALABHADRA SURESH

4. 3 సం॥ల క్రితము రహమాన్ వయస్సు యొక్క వ్యుత్క్రమము , 5 సం॥ల తరువాత అతని వయస్సు యొక్కవ్యుత్క్రమముల మొత్తము $\frac{1}{3}$ అయిన అతని ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత ?

సాధన : రహమాన్ యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు $=x$ సం॥లు అనుకొనుము

3 సం॥ల క్రితం రహమాన్ వయస్సు $=(x-3)$ సం॥లు

దాని వ్యుత్క్ర మము $=\dfrac{1}{x-3}$

5 సం॥ల తరువాత రహమాన్ వయస్సు $=(x+5)$ సం॥లు

దాని వ్యుత్క్ర మము $=\dfrac{1}{x+5}$

వ్యుత్క్ర మముల మొత్తం $=\dfrac{1}{3}$

$$\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{x+5+x-3}{(x-3)(x+5)}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{2x+2}{x^2+2x-15}=\frac{1}{3}$$
$$1\times(x^2+2x-15)=3\times(2x+2)$$
$$x^2+2x-15=6x+6$$
$$x^2+2x-15-6x-6=0$$
$$x^2-4x-21=0$$
$$(x-7)(x+3)=0$$

$x=7$ లేదా $x=-3$

$-7\times 3=-21$
$-7+3=-4$

$\therefore x=7$ (వయస్సు ఋణాత్మకం కాదు)

రహమాన్ యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు =7 సం॥లు

5. 'మౌళికకు గణితములో మరియు ఇంగ్లీషులో వచ్చిన మార్కుల మొత్తము 30. ఆమెకు ఒకవేళ గణితంలో 2మార్కులు ఎక్కువగా, ఇంగ్లీషులో 3 మార్కులు తక్కువగా వచ్చి వుంటే ఆ రెండింటి యొక్క లబ్ధము 210 అయి.వుండేది. అయిన ఆమెకు రెండు సబ్జక్టులలో వచ్చిన మార్కులను కనుగొనుము?

సాధన : 'మౌళికకు గణితములో మరియు ఇంగ్లీషులో వచ్చిన మార్కుల మొత్తము $=30$

మౌళికకు గణితంలో వచ్చిన మార్కులు $=x$ అనుకొనుము

మౌళికకు ఇంగ్లీష్ లో వచ్చిన మార్కులు $=30-x$

గణితంలో 2మార్కులు ఎక్కువగా వచ్చినపుడు మార్కులు $=x+2$

ఇంగ్లీష్ లో 3 మార్కులు తక్కువగా వచ్చినపుడు మార్కులు $=30-x-3=27-x$

ఈ రెండు మార్కుల లబ్ధం $=210$

$$(x+2)(27-x)=210$$
$$27x-x^2+54-2x-210=0$$
$$-x^2+25x-156=0$$
$$x^2-25x+156=0$$

BALABHADRA SURESH

$$-12 \times -13 = 156$$
$$-12 - 13 = -25$$

$(x-12)(x-13) = 0$

$x = 12 \ \ or \ \ x = 13$

$x = 12$ అయిన గణితం లో వచ్చిన మార్కులు $=12$,

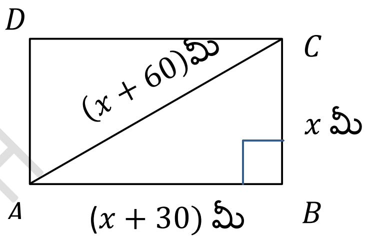
ఇంగ్లీష్ లో వచ్చిన మార్కులు $=30 - 12 = 18$

$x = 13$ అయిన గణితం లో వచ్చిన మార్కులు $=13$,

ఇంగ్లీష్ లో వచ్చిన మార్కులు $=30 - 13 = 17$

6. 'ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార స్థలము యొక్క కర్ణము దాని వెడల్పు కంటే 60 మీ ఎక్కువ మరియు పొడవు, వెడల్పుకంటే 30మీ. ఎక్కువ అయిన దీర్ఘ చతురస్రాకార స్థలము యొక్క కొలతలను కనుగొనుము?

సాధన : దీర్ఘ చతురస్రాకార స్థలము యొక్క వెడల్పు $=x$ మీ అనుకొనుము



పొడవు $= (x+30)$మీ

కర్ణము $=(x+60)$మీ

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$(x+30)^2 + x^2 = (x+60)^2$

$x^2 + 60x + 900 + x^2 = x^2 + 120x + 3600$

$x^2 + 60x + 900 + x^2 - x^2 - 120x - 3600 = 0$

$x^2 - 60x - 2700 = 0$

$(x-90)(x+30) = 0$

$$-90 \times 30 = -2700$$
$$-90 + 30 = -60$$

$x - 90 = 0$ లేదా $x + 30 = 0$

$x = 90$ లేదా $x = -30$

$\therefore x = 90$ (వెడల్పు ఋణాత్మకం కాదు)

దీర్ఘ చతురస్రాకార స్థలము యొక్క పొడవు $=x + 30 = 90 + 30 = 120$ మీ

వెడల్పు $=x = 90$ మీ.

7. రెండు సంఖ్యల వర్గాల భేదము 180. చిన్న సంఖ్య యొక్క వర్గము, పెద్దదానికి 8 రెట్లు అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము?

సాధన : పెద్ద సంఖ్య $=x$ అనుకొనుము

$(\text{చిన్న సంఖ్య})^2 = 8x$

దత్తాంశం ప్రకారం రెండు సంఖ్యల వర్గాల భేదము =180

$(\text{పెద్ద సంఖ్య})^2 - (\text{చిన్న సంఖ్య})^2 = 180$

$x^2 - 8x = 180$

$x^2 - 8x - 180 = 0$

$(x-18)(x+10) = 0$

$$-18 \times 10 = -180$$
$$-18 + 10 = -8$$

$x - 18 = 0$ లేదా $x + 10 = 0$

$x = 18$ లేదా $x = -10$

$\therefore x = 18$ (x ఋణ సంఖ్య కాదు)

BALABHADRA SURESH

పెద్ద సంఖ్య $= x = 18$

చిన్న సంఖ్య $= \sqrt{8x} = \sqrt{8 \times 18} = \sqrt{144} = 12.$

8. 'ఒక రైలు 360 కి. మీ దూరమును ఏకరీతి వేగముతో ప్రయాణించును. దీని వేగము గంటకు 5కి.మీ. పెరిగిన అదే దూరమును ప్రయాణించుటకు పట్టు కాలము 1 గంట తగ్గును. అయిన రైలు వేగమును కనుగొనుము?

సాధన : రైలు వేగము $= x$ కి. మీ /గం అనుకొనుము

దూరము $=360$ కి. మీ

$$\text{కాలము}(T_1) = \frac{\text{దూరము}}{\text{వేగము}} = \frac{360}{x} \text{ గం}$$

వేగము గంటకు 5 కి. మీ పెరిగిన తరువాత రైలు వేగము $=(x+5)$కి. మీ /గం

$$\text{కాలము}(T_2) = \frac{\text{దూరము}}{\text{వేగము}} = \frac{360}{x+5}\ h$$

దత్తాంశం ప్రకారం $T_1 - T_2 = 1$గం

$$\frac{360}{x} - \frac{360}{x+5} = 1$$

$$360\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5}\right) = 1$$

$$\frac{x+5-x}{x(x+5)} = \frac{1}{360}$$

$$x(x+5) = 5 \times 360$$

$$x^2 + 5x - 1800 = 0$$

$$(x-40)(x+45) = 0$$

$-40 \times 45 = -1800$
$-40 + 45 = 5$

$x - 40 = 0$ లేదా $x + 45 = 0$

$x = 40$ లేదా $x = -45$

$\therefore x = 40$ (వేగము ఋణాత్మకం కాదు)

రైలు వేగము $=40$ కి. మీ /గం

BALABHADRA SURESH

9. రెండు కుళాయిలు కలసి ఒక నీళ్ల ట్యాంకును $9\frac{3}{8}$ గం॥లలో నింపును.. ఎక్కువ వ్యాసమున్న కుళాయి ఒక్కటే తక్కువ వ్యాసమున్న కుళాయి నింపే సమయమునకు 10 గం॥ తక్కువ సమయంలో నింపును.అయితే ఒక్కొక్క కుళాయి విడివిడిగా ట్యాంకును నింప్పటకు పట్టే కాలమును కనుగొనుము?

సాధన : తక్కువ వ్యాసమున్న కుళాయి ట్యాంకును నింపుటకు పట్టు కాలం $= x$ గం॥ అనుకొనుము

ఎక్కువ వ్యాసమున్న కుళాయి ట్యాంకును నింపుటకు పట్టు కాలం $=(x-10)$ గం॥

తక్కువ వ్యాసమున్న కుళాయి ట్యాంకును 1 గం॥ లో నింపు భాగం $=\frac{1}{x}$

ఎక్కువ వ్యాసమున్న కుళాయి ట్యాంకును 1 గం॥ లో నింపు భాగం $=\frac{1}{x-10}$

రెండు కుళాయిలు కలసి నీళ్ల ట్యాంకును నింపుటకు పట్టు కాలం $=9\frac{3}{8}$ గం॥ $= \frac{75}{8}$గం॥

రెండు కుళాయిలు కలిసి నీళ్ల ట్యాంకును 1 గం॥ లో నింపు భాగం= $\frac{8}{75}$

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-10}\right)=\frac{8}{75}$$
$$\frac{x-10+x}{x(x-10)}=\frac{8}{75}$$
$$\frac{2x-10}{x^2-10x}=\frac{8}{75}$$
$$8\times(x^2-10x)=75(2x-10)$$
$$8x^2-80x-150x+750=0$$
$$8x^2-230x+750=0$$
$$4x^2-115x+375=0$$
$$4x^2-100x-15x+375=0$$
$$4x(x-25)-15(x-25)=0$$
$$(x-25)(4x-15)=0$$

$4\times375=1500$ $(-100)(-15)=1500$ $-100-15=-115$

$x-25=0$ లేదా $4x-15=0$

$x=25$ లేదా $x=\frac{15}{4}=4\frac{1}{4}$

$\therefore x=25\ (\ x>10)$

తక్కువ వ్యాసమున్న కుళాయి ట్యాంకును నింపుటకు పట్టు కాలం $=x=25$ గం.

ఎక్కువ వ్యాసమున్న కుళాయి ట్యాంకును నింపుటకు పట్టు కాలం $=(x-10)=(25-10)=15$ గం.

10. మైసూరు, బెంగుళూరు మధ్య 132 కి.మీ. దూరమును ప్రయాణించుటకు ఒక ఎక్స్‌ప్రెస్ రైలు, ప్యాసింజర్ రైలు కంటే 1 గంట సమయము తక్కువ తీసుకొంటుంది. (మధ్యలో ఆగే సమయాలను లెక్కలోకి తీసుకోలేదు).ఎక్స్‌ప్రెస్ రైలు సగటు వేగము, ప్యాసింజర్ రైలు వేగం కంటే 11కి.మీ / గంట ఎక్కువ అయిన రెండు రైళ్ల వేగాలను కనుగొనుము.

సాధన : ప్యాసింజర్ రైలు సగటు వేగము $=x$ కి. మీ /గం అనుకొనుము

ఎక్స్‌ప్రెస్ రైలు సగటు వేగము $=(x+11)$ కి. మీ /గం

దూరము =132 కి. మీ

ప్యాసింజరు రైలు ప్రయాణానికి పట్టు కాలం(t_1) $=\frac{\text{దూరము}}{\text{వేగము}}=\frac{132}{x}$ గం

ఎక్స్‌ప్రెస్ రైలు ప్రయాణానికి పట్టు కాలం$(t_2)=\frac{132}{x+11}$ గం

దత్తాంశం ప్రకారం $t_1-t_2=1$గం

$$\frac{132}{x}-\frac{132}{x+11}=1$$
$$132\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+11}\right)=1$$
$$\frac{x+11-x}{x(x+11)}=\frac{1}{132}$$
$$\frac{11}{x^2+11x}=\frac{1}{132}$$

BALABHADRA SURESH

$x^2 + 11x = 11 \times 132$
$x^2 + 11x - 1452 = 0$
$(x - 33)(x + 44) = 0$
$x - 33 = 0$ లేదా $x + 44 = 0$
$x = 33$ లేదా $x = -44$
$\therefore x = 33$ (వేగము ఋణాత్మకం కాదు)

$-33 \times 44 = -1452$
$-33 + 44 = 11$

ప్యాసింజర్ రైలు సగటు వేగము $= x$ కి. మీ /గం $= 33$ కి. మీ /గం

ఎక్స్‌ప్రెస్ రైలు సగటు వేగము $= (x + 11)$ కి. మీ /గం=33+11=44 కి. మీ /గం.

11. రెండు చతురస్రాల వైశాల్యాల మొత్తం 468 చ.మీ వాని చుట్టు కొలతల బేధము 24మీ. అయిన ఆ రెండుచతురస్రాల భుజాలను కనుగొనుము?

సాధన : చిన్న చతురస్ర భుజము $= x$ మీ అనుకొనుము

చిన్న చతురస్ర చుట్టు కొలత $= 4 \times$ భుజము $= 4x$ మీ

పెద్ద చతురస్ర చుట్టు కొలత $= (4x + 24) = 4(x + 6)$మీ

పెద్ద చతురస్ర భుజము $= \frac{\text{చుట్టుకొలత}}{4} = \frac{4(x+6)}{4} = (x + 6)$మీ

దత్తాంశం ప్రకారం రెండు చతురస్రాల వైశాల్యాల మొత్తం = 468 చ.మీ

$x^2 + (x + 6)^2 = 468$
$x^2 + x^2 + 12x + 36 - 468 = 0$
$2x^2 + 12x - 432 = 0$
$x^2 + 6x - 216 = 0$
$(x - 12)(x + 18) = 0$
$x = 12$ or $x = -18$
$\therefore x = 12$ (భుజము ఋణాత్మకం కాదు)

చతురస్ర వైశాల్యం $=$ (భుజము $)^2$

$-12 \times 18 = -432$
$-12 + 18 = 6$

కావలసిన రెండు చతురస్ర భుజాలు 12మీ ,12+6=18మీ .

12. 'n' భుజాలు గల ఒక బహుభుజి లోని కర్ణాల సంఖ్య $\frac{1}{2}n(n-3)$అయితే 65 కర్ణాలు గల బహుభుజి యొక్క భుజాల సంఖ్య ఎంత? 50 కర్ణాలు గల బహుభుజి వ్యవస్థితమౌ తుందా?

సాధన : $\frac{1}{2}n(n - 3) = 65$
$n^2 - 3n = 2 \times 65$
$n^2 - 3n - 130 = 0$
$(n - 13)(n + 10) = 0$
$n - 13 = 0$ or $n + 10 = 0$
$n = 13$ or $n = -10$
$\therefore n = 13$ (భుజాల సంఖ్య ఋణాత్మకం కాదు)

$-13 \times 10 = -130$
$-13 + 10 = -3$

65 కర్ణాలు గల బహుభుజి యొక్క భుజాల సంఖ్య =13.

$\frac{1}{2}n(n - 3) = 50$
$n^2 - 3n - 100 = 0$

BALABHADRA SURESH

$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-100) = 9 + 400 = 409$ ఇది పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్య కాదు .

n సహజ సంఖ్య కాదు

∴ 50 కర్ణాలు గల బహుభుజి వ్యవస్థితం కాదు .

మూలాల స్వభావము

$ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాల స్వభావం $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ పై ఆధారపడి ఉంటుంది .

$\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ ను వర్గ సమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క విచక్షణి అంటాం.

(i) $\mathrm{b^2 - 4ac > 0}$ అయిన రెండు వేరు వేరు వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉంటుంది.
(ii) $\mathrm{b^2 - 4ac = 0}$ అయిన రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉంటుంది.
(iii) $\mathrm{b^2 - 4ac < 0}$ అయిన వాస్తవ మూలాలను కలిగి వుండదు.

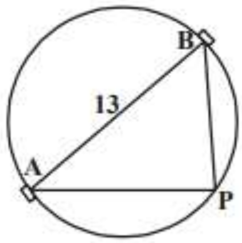
ఉదాహరణ -14. $2x^2 - 4x + 3 = 0$, యొక్క విచక్షణిని కనుగొని తద్వారా మూలాల స్వభావమును చర్చించుము.

సాధన : ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణం $2x^2 - 4x + 3 = 0$; $a = 2, b = -4, c = 3$

విచక్షణి=$\mathrm{b^2 - 4ac} = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 16 - 24 = -8 < 0$

ఇచ్చిన సమీకరణం వాస్తవ మూలాలను కలిగి వుండదు.

ఉదాహరణ-15. 13 సెం.మీ. వ్యాసం గల ఒక వృత్తాకార పార్కు సరిహద్దు మీద ఒక స్తంభమును ఏర్పాటు చేయాలనుకున్నారు. పార్కు యొక్కసరిహద్దు మీద ఎదురెదురుగా అనగా ఒక వ్యాసం యొక్క చివరి బిందువుల వద్దఏర్పాటు చేయబడిన A మరియు B అనే రెండు గేట్ల నుంచి ఈ స్తంభము వరకూ గల దూరాల భేధము 7 మీ.వుండునట్లు స్తంభమును ఏర్పాటు చేయగలమా? ఒకవేళ చేయగలిగితే రెండు గేట్ల నుంచి ఈ స్తంభం ఎంత దూరంలో వుంటుంది?



సాధన : స్తంభమును ఏర్పాటు చేసే బిందువు P అనుకొనుము .

AP= x మీ అనుకొనుము. BP= $(x + 7)$మీ. మరియు AB= 13 మీ.

అర్ధ వృత్తం లోని కోణం =90^0 .కావున $\angle APB = 90^0$

$AP^2 + BP^2 = AB^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం)

$x^2 + (x + 7)^2 = 13^2$
$x^2 + x^2 + 14x + 49 - 169 = 0$
$2x^2 + 14x - 120 = 0$
$x^2 + 7x - 60 = 0$
$(x - 5)(x + 12) = 0$
$x - 5 = 0 \; or \; x + 12 = 0$
$x = 5 \; or \; x = -12$
$\therefore x = 5$ (దూరం ఋణాత్మకం కాదు)

$-5 \times 12 = -60$ $-5 + 12 = 7$

AP=5 మీ , BP=5+7=12 మీ

BALABHADRA SURESH

అనగా A నుండి 5 మీ దూరంలో మరియు B నుండి 12 మీ దూరంలో స్తంభంను ఏర్పాటు చేయాలి.

ప్రయత్నించండి

1. ఒక వర్గ సమీకరణం సాధించడానికి ముందు దాని యొక్క విచక్షణిని కనుగొనటం వల్ల కలిగే లాభం ఏమిటో వివరించండి ? దీని విలువ ఎందుకు ముఖ్యమైనది ?

సాధన : ఒక వర్గ సమీకరణం సాధించడానికి ముందు దాని యొక్క విచక్షణిని కనుగొనటం వల్ల మూలాల స్వభావం తెలుస్తుంది . మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలయితే వర్గ సూత్రం ఉపయోగించి మూలాలు కనుగొనవచ్చు.

ఉదాహరణ -16. $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ యొక్క విచక్షణిని కనుగొనుము ? తద్వారా మూలాల స్వభావమును తెలుపుము? ఒకవేళ మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలయితే వానిని కనుగొనుము?.

సాధన : $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$: $a = 3, b = -2, c = \frac{1}{3}$

విచక్షణి $= b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0$

ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణం రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉంటుంది .

మూలాలు $= \frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2 \times 3}, \frac{2}{2 \times 3} = \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$.

BALABHADRA SURESH

అభ్యాసం - 5.4

1. క్రింది సమీకరణాల మూలాల స్వభావమును తెలుపుము ? ఒక వేళ వాస్తవ మూలాలు వుంటే కనుగొనుము

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

సాధన : $a = 2, b = -3, c = 5$

విచక్షణి $= b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31 < 0$

ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణం వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉండదు .

(ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

సాధన : $a = 3, b = -4\sqrt{3}, c = 4$

విచక్షణి $= b^2 - 4ac = \left(-4\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 3 \times 4 = 48 - 48 = 0$

మూలాలు సమాన వాస్తవ సంఖ్యలు

మూలాలు $= \frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{2 \times 3}, \frac{4\sqrt{3}}{2 \times 3} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

Sol: $a = 2, b = -6, c = 3$

$b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 36 - 24 = 12 < 0$

మూలాలు వాస్తవాలు ,అసమానాలు(విభిన్నాలు) .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2 \times 2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\left(3 \pm \sqrt{3}\right)}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

మూలాలు $= \frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

2. క్రింది వర్గ సమీకరణాలలో రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలు వుంటే k విలువను కనుగొనుము ?.

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$

సాధన : $a = 2, b = k, c = 3$

సమాన వాస్తవ మూలాలు వుంటే $b^2 - 4ac = 0$

$k^2 - 4 \times 2 \times 3 = 0$

$k^2 = 24 \Rightarrow k = \pm\sqrt{24} = \pm\sqrt{4 \times 6} = \pm 2\sqrt{6}$

(ii) $kx(x-2) + 6 = 0$

సాధన : $kx^2 - 2kx + 6 = 0$

$a = k, b = -2k, c = 6$

సమాన వాస్తవ మూలాలు వుంటే $b^2 - 4ac = 0$

$(-2k)^2 - 4 \times k \times 6 = 0$

$4k^2 - 24k = 0$

$4k(k-6) = 0$

$4k = 0$ లేదా $k - 6 = 0$

$k = 0$ లేదా $k = 6$

$\therefore k = 6$ ($k = 0$ అయితే $a = 0$, $b = 0$ అగును . వర్గ సమీకరణం కాదు)

3. మామిడి పండ్లను నిల్వచేయటకు 800 చ.మీ. వైశాల్యం వుంటూ, పొడవు వెడల్పు కంటే రెండు రెట్లువుండే విధంగా ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలమును ఏర్పాటు చేయగలమా? చేయగలిగితే దాని పొడవు,'వెడల్పులను కనుగొనుము?.

సాధన : దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము వెడల్పు $(b) = x$ మీ అనుకొనుము.

పొడవు $(l) = 2x$ మీ

దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం =800 చ.మీ

$x \times 2x = 800$

$x^2 = \frac{800}{2} = 400 \Rightarrow x = \sqrt{400} = 20$

కావలసిన దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము ఏర్పాటు చేయగలము

దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము పొడవు $= 2 \times 20 = 40$ మీ

వెడల్పు $= 20$ మీ .

4. ఇద్దరి మిత్రుల వయస్సుల మొత్తం 20 సంలు. నాలుగు సంవత్సరాల క్రితం వారి వయస్సుల లబ్ధం 48.ఇది సాధ్యమేనా? ఒకవేళ సాధ్యమైతే వారి వయస్సులను కనుగొనుము.

Sol:

BALABHADRA SURESH

	మొదటి మిత్రుడు	రెండవ మిత్రుడు
ప్రస్తుత వయస్సు (సం. లు)	x	$20-x$
నాలుగు సంవత్సరాల క్రితం వయస్సు	$x-4$	$20-x-4=16-x$

నాలుగు సంవత్సరాల క్రితం వారి వయస్సుల లబ్ధం =48

$$(x-4)(16-x)=48$$
$$16x-x^2-64+4x-48=0$$
$$-x^2+20x-112=0$$
$$x^2-20x+112=0$$
$$a=1, b=-20, c=112$$
$$b^2-4ac=(-20)^2-4\times 1\times 112=400-448=-48<0$$

వాస్తవ మూలాలు లేవు . కావున ఇది సాధ్యం కాదు .

5. చుట్టుకొలత 80 మీ. వైశాల్యము 400 చ.మీ వుండునట్లు ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పార్కును తయారు చేయగలమా? చేయగలిగితే దాని పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము?.

సాధన : దీర్ఘచతురస్రాకార పార్కు పొడవు (l)=x మీ అనుకొనుము

పార్కు చుట్టుకొలత =80 మీ

$$2(l+b)=80$$
$$x+b=\frac{80}{2}=40 \Rightarrow b=40-x$$

వెడల్పు (b) = $(40-x)$ మీ

పార్కు వైశాల్యం =400చ. మీ

దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం=పొడవు × వెడల్పు

$$x(40-x)=400$$
$$40x-x^2-400=0$$
$$x^2-40x+400=0$$
$$(x-20)(x-20)=0$$
$$x-20=0 \Rightarrow x=20$$

దీర్ఘచతురస్రాకార పార్కు పొడవు =20 మీ

దీర్ఘచతురస్రాకార పార్కు వెడల్పు =40 − 20 =20 మీ

BALABHADRA SURESH