అధ్యాయము 3

10 వ తరగతి -2023-24

బహుపదులు (Polynomials)

1. **బహుపది** : ఒక బీజీయ సమాసం లోని చర రాశుల ఘాతాంకాలు పూర్ణాంకాలు అయితే అది ఒక బహుపది .

ఉదాహరణ : $2x + 5, 3x^2 + 5x + 6, -5y$ ...

బహుపదులు	బహుపదులుకాదు
$2x$	$4x^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{3}x - 4$	$3x^2 + 4x^{-1} + 5$
$x^2 - 2x - 1$	$4 + \frac{1}{x}$

2. **బహుపది పరిమాణం** : x చరరాశిలో గల బహుపది $p(x)$లో x యొక్క గరిష్ఠ ఘాతాంకమును బహుపది $p(x)$ యొక్క పరిమాణం అందురు

3. **రేఖీయ బహుపది** : బహుపది పరిమాణం 1అయితే దానిని రేఖీయ బహుపది అందురు .

ఉదాహరణ: $3x + 5, 7x - 8, -9x$, ...

చరరాశి x లో రేఖీయ బహుపది సాధారణ రూపం $ax + b \ (a, b \in R, a \neq 0)$.

4. **వర్గ బహుపది** : బహుపది పరిమాణం 2 అయితే దానిని వర్గ బహుపది అందురు.

ఉదాహరణ: $x^2 - 5x + 6, 2x^2 - 5, 7x^2$, … ..

చరరాశి x లో వర్గ బహుపది సాధారణ రూపం $ax^2 + bx + c \ (a, b, c \in R, a \neq 0)$.

5. **ఘన బహుపది** : బహుపది పరిమాణం 3 అయితే దానిని ఘన బహుపది అందురు.

ఉదాహరణ: $5x^3 - 4x^2 + x - 1, 2x^3 - 3x + 5, -3x^3 - 10$,.......

చరరాశి x లో ఘన బహుపది సాధారణ రూపం $ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a, b, c, d \in R, a \neq 0)$.

6. **చరరాశి x లో n వ పరిమాణ బహుపది సాధారణ రూపం** :

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots\cdots + a_{n-1}x + a_n$$

BALABHADRA SUR

ఇందులో $a_0, a_1, a_2, \dots \dots \dots, a_{n-1}, a_n$ అనేవి చరరాశి వాస్తవ గుణకాలు మరియు $a_0 \neq 0$.

7. **బహుపది యొక్క విలువ** :

$p(x)$ అనే బహుపదికి k వద్ద వచ్చువిలువ $= p(k)$.(xకు బదులుగా kప్రతిక్షేపించాలి)

$p(x)$ అనే బహుపదికి 2 వద్ద వచ్చువిలువ $= p(2)$

ఇవి చేయండి (page 49)

i) $P(x) = x^2 - 5x - 6$, అయిన $p(1), p(2), p(3), p(0), p(-1), p(-2), p(-3)$విలువలు కనుగొనండి .

సాధన : $P(x) = x^2 - 5x - 6$

$P(1) = (1)^2 - 5 \times 1 - 6$

$= 1 - 5 - 6$

$= 1 - 11$

$= -10$

$P(2) = (2)^2 - 5 \times 2 - 6$

$= 4 - 10 - 6$

$= 4 - 16$

$= -12$

$P(3) = (3)^2 - 5 \times 3 - 6$

$= 9 - 15 - 6$

$= 9 - 21$

$= -12$

$P(0) = (0)^2 - 5 \times 0 - 6$

$= 0 - 0 - 6$

$= -6$

$P(-1) = (-1)^2 - 5 \times (-1) - 6$

$= 1 + 5 - 6$

$= 6 - 6$

BALABHADRA SURESH

$= 0$

$P(-2) = (-2)^2 - 5 \times (-2) - 6$

$= 4 + 10 - 6$

$= 14 - 6$

$= 8$

$P(-3) = (-3)^2 - 5 \times (-3) - 6$

$= 9 + 15 - 6$

$= 21 - 6 = 15$

ii) $\boldsymbol{P(m) = m^2 - 3m + 1}$ **అయిన** $\boldsymbol{p(1)}$**మరియు** $\boldsymbol{p(-1)}$ **విలువలు కనుగొనండి .**

సాధన : $P(m) = m^2 - 3m + 1$

$P(1) = (1)^2 - 3 \times 1 + 1$

$= 1 - 3 + 1$

$= 2 - 3$

$= -1$

$P(-1) = (-1)^2 - 3 \times (-1) + 1$

$= 1 + 3 + 1$

$= 5$

BALABHADRA SURESH

బహుపది శూన్యాలు :

$p(x)$ఒక బహుపది, kఒక వాస్తవ సంఖ్య $p(k) = 0$అయిన kను బహుపది $p(x)$యొక్క శూన్య విలువ అంటాం .

ఇవి చేయండి

(i) $p(x) = x^2 - 4x + 3$ అయిన $p(0), p(1), p(2), p(3)$ విలువలు కనుగొనండి. $p(x)$ యొక్క శూన్యాలు ఏవో తెల్పండి.

(ii) $x^2 - 9$ అనే బహుపదికి -3 మరియు 3 శూన్యాలు అవుతాయో కాదో సరిచూడండి.

i)

సాధన : $p(x) = x^2 - 4x + 3$

$p(0) = (0)^2 - 4 \times 0 + 3$

$= 0 - 0 + 3$

$= 3$

$p(1) = (1)^2 - 4 \times 1 + 3$

$= 1 - 4 + 3$

$= 4 - 4$

$= 0$

$p(2) = (2)^2 - 4 \times 2 + 3$

$= 4 - 8 + 3$

$= 7 - 8$

$= -1$

$p(3) = (3)^2 - 4 \times 3 + 3$

$= 9 - 12 + 3$

$= 12 - 12$

$= 0$

$p(1) = 0$ మరియు $p(3) = 0$ కావున

$\therefore$ 1,3 లు బహుపది $p(x) = x^2 - 4x + 3$కు శూన్యాలు అవుతాయి

ii)

సాధన : $p(x) = x^2 - 9$

$p(-3) = (-3)^2 - 9$

$= 9 - 9$

$= 0$

BALABHADRA SURESH

$p(3) = (3)^2 - 9$

$= 9 - 9$

$= 0$

$p(-3) = 0$ మరియు $p(3) = 0$ కావున

$x^2 - 9$ అనే బహుపదికి -3 మరియు 3 శూన్యాలు అవుతాయి .

అభ్యాసం - 3.1

1. $p(x) = 5x^7 - 6x^5 + 7x - 6$, అయిన

   (i). x^5యొక్క గుణకం   Ans: -6

   (ii). $p(x)$యొక్క పరిమాణం   Ans: 7

   (iii). స్థిరపదము .   Ans: -6

$p(x) = 5x^7 - 6x^5 + 7x - 6$

$p(x)$యొక్క పరిమాణం → 7

x^5యొక్క గుణకం → -6

స్థిరపదము → -6

BALABHADRA SURESH

2. కింది ప్రవచనాలలో ఏవి సత్యం ? ఏవి అసత్యం ? కారణాలను తెల్పండి ?

   (i). $\sqrt{2}x^2 - 3x + 1$ అనే బహుపది పరిమాణం $\sqrt{2}$.

   సాధన: అసత్యము . ఎదువలన అనగా ఇచ్చిన బహుపది పరిమాణం 2 .

   (ii). $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ అనే బహుపదిలో x^2 యొక్కగుణకం 2 .

   సాధన: అసత్యము . ఎదువలన అనగా ఇచ్చిన బహుపదిలో x^2 యొక్కగుణకం -4

   (iii). $\frac{1}{x^2-5x+6}$ అనేది ఒక వర్గ బహుపది .

   సాధన: అసత్యము

   (iv). ఒక బహుపది పరిమాణం దానిలో పదాల సంఖ్య కన్నా ఒకటి ఎక్కువ .

   సాధన: అసత్యము. ఎదువలన అనగాబహుపది $5x^7 - 6x^5 + 7x - 6$ లోని పదాల సంఖ్య 4. కానీ దాని పరిమాణం 7

3. $p(t) = t^3 - 1$ అయిన $p(1), p(-1), p(0), p(2)$ మరియు $p(-2)$ విలువలు కనుగొనండి .

సాధన: $P(t) = t^3 - 1$

$P(1) = 1^3 - 1$

$= 1 - 1$

$= 0$

$P(-1) = (-1)^3 - 1$

$= -1 - 1$

$= -2$

$P(0) = 0^3 - 1$

$= 0 - 1$

$= -1$

$P(-2) = (-2)^3 - 1$

$= -8 - 1$

$= -9$

4. -2 మరియు 2 అనేవి $x^4 - 16$ అనే బహుపదికి శూన్యాలు అగునో, కాదో సరి చూడండి .

సాధన : $p(x) = x^4 - 16$

$p(-2) = (-2)^4 - 16$

$= 16 - 16$

$= 0$

$p(2) = (2)^4 - 16$

$= 16 - 16$

$= 0$

$p(-2) = 0$ మరియు $p(2) = 0$

కావున -2 మరియు 2 అనేవి $x^4 - 16$ అనే బహుపదికి శూన్యాలు అవుతాయి .

BALABHADRA SURESH

5. $p(x) = x^2 - x - 6$ అనే బహుపదికి 3 మరియు -2 అనేవి శూన్యాలు అగునో, కాదో సరి చూడండి

సాధన : $\mathrm{P}(x) = x^2 - x - 6$

$\mathrm{P}(3) = 3^2 - 3 - 6$

$= 9 - 3 - 6$

$= 9 - 9$

$= 0$

$\mathrm{P}(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6$

$= 4 + 2 - 6$

$= 6 - 6$

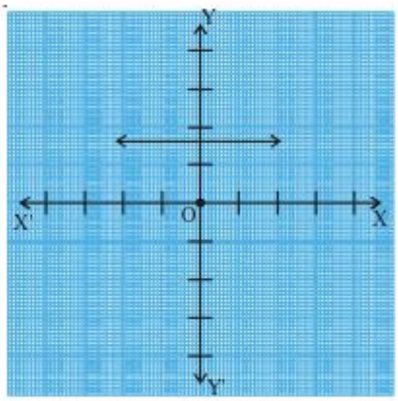
$= 0$

$\mathrm{P}(3) = 0$ మరియు $\mathrm{P}(-2) = 0$.

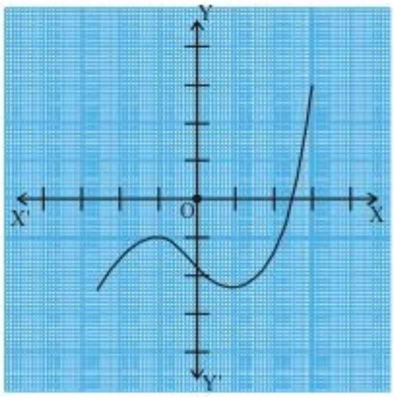
కావున $\mathrm{P}(x) = x^2 - x - 6$బహుపదికి 3 మరియు -2 శూన్యాలు అవుతాయి.

అభ్యాసం – 3.2

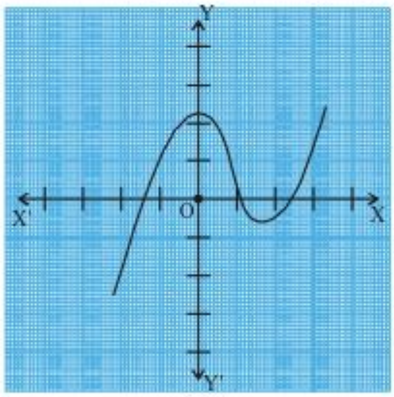
1. కొన్ని $p(x)$ బహుపదుల సంబంధిత $y = p(x)$ యొక్క పటాలు దిగువ ఇవ్వబడినవి. $p(x)$ యొక్క శూన్యాల సంఖ్యను పటాలు పరిశీలించి తెలపండి.



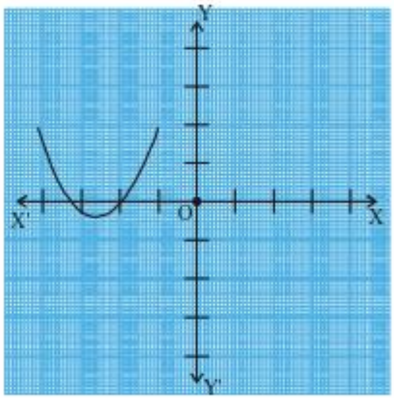
(i)



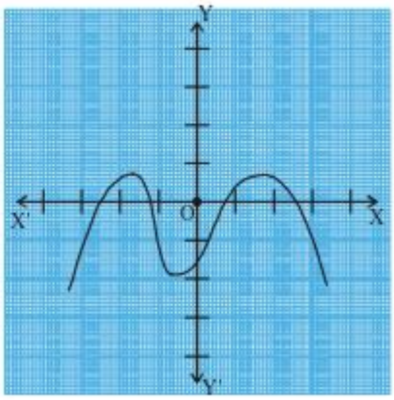
(ii)



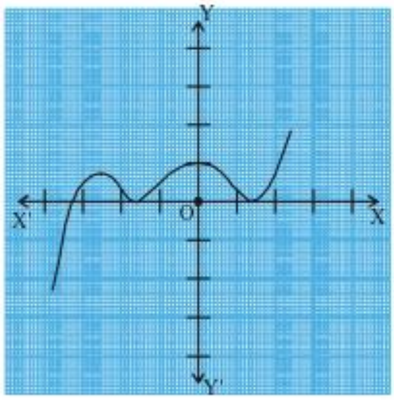
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

Sol: (i) రేఖా చిత్రం X-అక్షంను ఖండించుట లేదు . కావున శూన్యాల సంఖ్య =0 (శూన్యాలు లేవు)

(ii) రేఖా చిత్రం X-అక్షంను ఒక బిందువు వద్ద ఖండించింది . కావున శూన్యాల సంఖ్య =1

(iii) రేఖా చిత్రం X-అక్షంను మూడు బిందువుల వద్ద ఖండించింది . కావున శూన్యాల సంఖ్య =3

(iv) రేఖా చిత్రం X-అక్షంను రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించింది . కావున శూన్యాల సంఖ్య =2

(v) రేఖా చిత్రం X-అక్షంను నాలుగు బిందువుల వద్ద ఖండించింది . కావున శూన్యాల సంఖ్య =4

(vi) రేఖా చిత్రం X-అక్షంను మూడు బిందువుల వద్ద ఖండించింది . కావున శూన్యాల సంఖ్య =3

2. కింది బహుపదుల శూన్యాలు కనుగొనండి .

(i). $P(x) = 3x$

సాధన : $P(x) = 0$ తీసుకొనగా

$3x = 0$

$x = 0$

ఇచ్చిన బహుపది $P(x) = 3x$ యొక్క శూన్యం = 0.

(ii). $\mathrm{P}(x) = x^2 + 5x + 6$

సాధన : $P(x) = 0$ తీసుకొనగా

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$x^2 + 2x + 3x + 6 = 0$

$x(x + 2) + 3(x + 2) = 0$

$(x + 2)(x + 3) = 0$

$(x + 2) = 0$ or $(x + 3) = 0$

$x = -2$ or $x = -3$

$\therefore$ $\mathrm{P}(x) = x^2 + 5x + 6$ బహుపది యొక్క శూన్యాలు -2 మరియు -3.

(iii). $p(x) = (x + 2)(x + 3)$

సాధన : $P(x) = 0$ తీసుకొనగా

$(x + 2)(x + 3) = 0$

$(x + 2) = 0$ or $(x + 3) = 0$

$x = -2$ or $x = -3$

$\therefore$ $\mathrm{P}(x) = (x + 2)(x + 3)$ బహుపది యొక్క శూన్యాలు -2 మరియు -3.

(iv). $p(x) = x^4 - 16$

సాధన : $P(x) = 0$ తీసుకొనగా

$x^4 - 16 = 0$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$(x^2)^2 - 4^2 = 0$

$(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$

$(x^2 + 4) = 0$ or $(x^2 - 4) = 0$

$x^2 = -4$ or $x^2 = 4$

$x = \sqrt{-4}$ or $x = \sqrt{4} = \pm 2$

BALABHADRA SURESH

$x = 2, -2 \quad (\sqrt{-4}$ అనేది వాస్తవ సంఖ్య కాదు)

$\therefore\ p(x) = x^4 - 16$ బహుపది యొక్క శూన్యాలు 2 మరియు -2

4. $p(x) = 4x^2 + 3x - 1$ అనే బహుపదికి $\frac{1}{4}$ మరియు -1 అనేవి శూన్యాలు ఏవిధంగా అగునో తెలపండి .

సాధన : $p(x) = 4x^2 + 3x - 1$

$$p\left(\frac{1}{4}\right) = 4\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3 \times \frac{1}{4} - 1$$
$$= 4 \times \frac{1}{16} + \frac{3}{4} - 1$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1$$
$$= \frac{4}{4} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$p(-1) = 4(-1)^2 + 3 \times (-1) - 1$$
$$= 4 \times 1 - 3 - 1$$
$$= 4 - 3 - 1$$
$$= 4 - 4$$
$$= 0$$

$p\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ మరియు $p(-1) = 0$

కావున $p(x) = 4x^2 + 3x - 1$ అనే బహుపదికి $\frac{1}{4}$ మరియు -1 అనేవి శూన్యాలు అవుతాయి .

ఒక బహుపది గుణకలకు , శూన్యాలకు మధ్యసంబంధము

BALABHADRA SURE

1. α మరియు β లు వర్గ బహుపది $ax^2 + bx + c\ (a, b, c \in R, a \neq 0)$ యొక్క శూన్యాలు అయితే

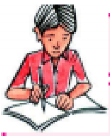
i) శూన్యాల మొత్తం $= \alpha + \beta = \frac{-(x \text{ యొక్క గుణకం})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{-b}{a}$

ii) శూన్యాల లబ్ధం $= \alpha\beta = \frac{\text{స్థిర పదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{c}{a}$

x^2 యొక్క గుణకం $= a$
x యొక్క గుణకం $= b$
స్థిర పదము $= c$

2. α మరియు β లు శూన్యాలు గా గల వర్గ బహుపది $= \mathrm{k}[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

$= k\left[x^2 - (\text{శూన్యాల మొత్తం})x + \text{శూన్యాల లబ్ధం}\right]$(k ఒక స్థిర సంఖ్య)



ఇవి చేయండి

దిగువ ఇవ్వబడిన వర్గ బహుపదుల యొక్క శూన్యాలను కనుగొనండి. ఇదేవిధంగా శూన్యాల మొత్తము మరియు లబ్ధమును కనుగొని, బహుపది పదాల గుణకాలకు బహుపదిశూన్యాలకు మధ్యన గల సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

(i) $p(x) = x^2 - x - 6$ (ii) $p(x) = x^2 - 4x + 3$

(iii) $p(x) = x^2 - 4$ (iv) $p(x) = x^2 + 2x + 1$

(i). $p(x) = x^2 - x - 6$

x^2 యొక్క గుణకం $= a$=1
x యొక్క గుణకం $= b$=-1
స్థిర పదము $= c$= -6

సాధన : $p(x) = x^2 - x - 6$

$= x^2 - 3x + 2x - 6$

$= x(x-3) + 2(x-3)$

$= (x-3)(x+2)$

శూన్యాల కొరకు $p(x) = 0$ అనుకొనుము

$(x-3)(x+2) = 0$

$x - 3 = 0$ లేదా $x + 2 = 0$

$x = 3$ లేదా $x = -2$

$p(x) = x^2 - x - 6$ బహుపది యొక్క శూన్యాలు 3 మరియు -2

$\alpha = 3$ మరియు $\beta = -2$

శూన్యాల మొత్తం $= (3) + (-2) = 1 = \frac{-(-1)}{1} = \frac{-(x \text{ యొక్క గుణకం})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{-b}{a}$

శూన్యాల లబ్ధం $= (3) \times (-2) = -6 = \frac{-6}{1} = \frac{\text{స్థిర పదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{c}{a}$

(ii). $p(x) = x^2 - 4x + 3$

సాధన : $p(x) = x^2 - 4x + 3$

x^2 యొక్క గుణకం $= a = 1$
x యొక్క గుణకం $= b = -4$
స్థిర పదము $= c = 3$

$= x^2 - 3x - x + 3$

$= x(x-3) - 1(x-3)$

$= (x-3)(x-1)$

శూన్యాల కొరకు $p(x) = 0$ అనుకొనుము

$(x-3)(x-1) = 0$

$x - 3 = 0$ or $x - 1 = 0$

$x = 3$ or $x = 1$

$p(x) = x^2 - 4x + 3$ బహుపది యొక్క శూన్యాలు 3 మరియు 1

$\alpha = 3$ మరియు $\beta = 1$

శూన్యాల మొత్తం $= (3) + (1) = 4 = \frac{-(-4)}{1} = \frac{-(x \text{ యొక్క గుణకం})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{-b}{a}$

శూన్యాల లబ్ధం $= (3) \times (1) = 3 = \frac{3}{1} = \frac{\text{స్థిర పదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{c}{a}$

x^2 యొక్క గుణకం $= a = 1$
x యొక్క గుణకం $= b = 0$

BALABHADRA SURESH

(iii). $p(x) = x^2 - 4$

సాధన : $p(x) = x^2 - 4$

$= x^2 - 2^2$

$= (x+2)(x-2)$

శూన్యాల కొరకు $p(x) = 0$ అనుకొనుము

$(x+2)(x-2) = 0$

$x + 2 = 0$ లేదా $x - 2 = 0$

$x = -2$ లేదా $x = 2$

$p(x) = x^2 - 4$ బహుపది యొక్క శూన్యాలు -2 మరియు 2

$\alpha = -2$ మరియు $\beta = 2$

శూన్యాల మొత్తం $= (-2) + 2 = 0 = \frac{-(0)}{1} = \frac{-(x \text{ యొక్క గుణకం})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{-b}{a}$

శూన్యాల లబ్ధం $= (-2) \times 2 = -4 = \frac{-4}{1} = \frac{\text{స్థిర పదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{c}{a}$

(iv). $p(x) = x^2 + 2x + 1$

సాధన : $p(x) = x^2 + 2x + 1$

x^2 యొక్క గుణకం $= a = 1$

x యొక్క గుణకం $= b = 2$

స్థిర పదము $= c = 1$

$= x^2 + x + x + 1$

$= x(x+1) + 1(x+1)$

$= (x+1)(x+1)$

శూన్యాల కొరకు $p(x) = 0$ అనుకొనుము

$(x+1)(x+1) = 0$

$x + 1 = 0$ లేదా $x + 1 = 0$

$x = -1$ లేదా $x = -1$

BALABHADRA SURESH

$p(x) = x^2 + 2x + 1$ బహుపది యొక్క శూన్యాలు -1 మరియు -1

$\alpha = -1$ మరియు $\beta = -1$

శూన్యాల మొత్తం $= (-1) + (-1) = -2 = \frac{-(2)}{1} = \frac{-(x \text{ యొక్క గుణకం})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{-b}{a}$

శూన్యాల లబ్ధం $= (-1) \times (-1) = 1 = \frac{1}{1} = \frac{\text{స్థిర పదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{c}{a}$

ఉదాహరణ-3. $x^2 + 7x + 10$ అనే వర్గబహుపది యొక్క శూన్యాలను కనుగొని, శూన్యాలకు, బహుపది గుణకాలకు సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

సాధన : $p(x) = x^2 + 7x + 10$

x^2 యొక్క గుణకం $= a = 1$
x యొక్క గుణకం $= b = 7$
స్థిర పదము $= c = 10$

$= x^2 + 5x + 2x + 10$

$= x(x+5) + 2(x+5)$

$= (x+5)(x+2)$

శూన్యాల కొరకు $p(x) = 0$ అనుకొనుము

$(x+5)(x+2) = 0$

$x + 5 = 0$ లేదా $x + 2 = 0$

$x = -5$ లేదా $x = -2$

$p(x) = x^2 + 7x + 10$ బహుపది యొక్క శూన్యాలు -5 మరియు -2

$\alpha = -5$ మరియు $\beta = -2$

శూన్యాల మొత్తం $= (-5) + (-2) = -7 = \frac{-(7)}{1} = \frac{-(x \text{ యొక్క గుణకం})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{-b}{a}$

శూన్యాల లబ్ధం $= (-5) \times (-2) = 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{స్థిర పదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{c}{a}$

ఉదాహరణ-4. $x^2 - 3$ అనే బహుపది యొక్క శూన్యాలు కనుగొని, శూన్యాలకు బహుపది గుణకాలకు మధ్యగల సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

సాధన : $(x) = x^2 - 3$

x^2 యొక్క గుణకం $= a = 1$
x యొక్క గుణకం $= b = 0$
స్థిర పదము $= c = -3$

BALABHADRA SU

$= x^2 - \sqrt{3}^2$

$= (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

శూన్యాల కొరకు $p(x) = 0$ అనుకొనుము

$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$

$x + \sqrt{3} = 0$ లేదా $x - \sqrt{3} = 0$

$x = -\sqrt{3}$ లేదా $x = \sqrt{3}$

$p(x) = x^2 - 3$ బహుపది యొక్క శూన్యాలు $-\sqrt{3}$ మరియు $\sqrt{3}$

$\alpha = -2$ మరియు $\beta = 2$

శూన్యాల మొత్తం $= (-\sqrt{3}) + \sqrt{3} = 0 = \frac{-(0)}{1} = \frac{-(x \text{ యొక్క గుణకం})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{-b}{a}$

శూన్యాల లబ్ధం$= (-\sqrt{3}) \times \sqrt{3} = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{\text{స్థిర పదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{c}{a}$

ఉదాహరణ-5. ఒక వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాలు మొత్తము మరియు లబ్ధము వరుసగా -3 మరియు 2 అయిన ఆ వర్గ బహుపదిని కనుగొనండి.

Sol: శూన్యాల మొత్తం $= \alpha + \beta = -3$

శూన్యాల లబ్ధం $= \alpha\beta = 2$

వర్గ బహుపది $= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

$= k[x^2 - (-3)x + 2]$

$= k[x^2 + 3x + 2]$

k=1అయితే

కావలసిన వర్గ బహుపది $= [x^2 + 3x + 2]$

ఉదాహరణ-6. ఒక వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాలు వరుసగా 2 మరియు $\frac{-1}{3}$ అయినచో ఆ బహుపదిని కనుగొనండి.

Sol: వర్గ బహుపది శూన్యాలు $\alpha = 2$ మరియు $\beta = -\frac{1}{3}$

BALABHADRASURESH

$$\alpha+\beta = 2+\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{6-1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\alpha\times\beta = 2\times\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

వర్గ బహుపది $= \mathrm{k}[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]$

$$= k[x^2-\left(\frac{5}{3}\right)x+\left(-\frac{2}{3}\right)]$$

$$= k[\,x^2-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}\,]$$

k=3 అయినచో

కావలసిన వర్గ బహుపది $= 3[\,x^2-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}\,]$

$$= 3\times\ x^2-3\times\frac{5}{3}x-3\times\frac{2}{3}$$

$$= 3x^2-5x-2.$$

ప్రయత్నించండి (page- 64)

(i). -2 మరియు $\frac{1}{3}$ శూన్యాలు కలిగిన వర్గ బహుపది ని కనుగొనండి .

Sol: వర్గ బహుపది శూన్యాలు $\alpha = -2$ మరియు $\beta = \frac{1}{3}$

$$\alpha+\beta = (-2)+\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-6+1}{3} = \frac{-5}{3}$$

$$\alpha\times\beta = (-2)\times\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

వర్గ బహుపది $= \mathrm{k}[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]$

$$= k[x^2-\left(-\frac{5}{3}\right)x+\left(-\frac{2}{3}\right)]$$

$$= k[\,x^2+\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}\,]$$

k=3అయినచో

కావలసిన వర్గ బహుపది $= 3[\,x^2+\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}\,]$

$$= 3\times\ x^2+3\times\frac{5}{3}x-3\times\frac{2}{3}$$

$$= 3x^2+5x-2.$$

(ii). శూన్యాల మొత్తం $\frac{-3}{2}$ మరియు లబ్ధం -1 కలిగిన వర్గ బహుపదిని తెలపండి .

Sol: శూన్యాల మొత్తం $= \alpha+\beta = -\frac{3}{2}$

BALABHADRA SURESH

శూన్యాల లబ్ధం $= \alpha\beta = -1$

వర్గ బహుపది $= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

$$= k\left[x^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)x + (-1)\right]$$

$$= k\left[x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right]$$

k=2 అయితే

కావలసిన వర్గ బహుపది $= 2 \times \left[x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right]$

$$= 2x^2 + 3x - 2$$

అభ్యాసం – 3.3

1. కింది వర్గ బహుపదులకు శూన్యలను కనుగొని బహుపది గుణకాలకు ,శూన్యలకు గల సంబంధాన్ని సరిచూడండి .

(i). $x^2 - 2x - 8$

సాధన : $p(x) = x^2 - 2x - 8$

x^2 యొక్క గుణకం $= a = 1$
x యొక్క గుణకం $= b = -2$
స్థిర పదము $= c = -8$

$= x^2 - 4x + 2x - 8$

$= x(x - 4) + 2(x - 4)$

$= (x - 4)(x + 2)$

$p(x) = 0$ అనుకొనుము

$(x - 4)(x + 2) = 0$

$x - 4 = 0$ లేదా $x + 2 = 0$

$x = 4$ లేదా $x = -2$

$p(x) = x^2 - 2x - 8$ బహుపది యొక్క శూన్యాలు 4 మరియు -2

$\alpha = 4$ మరియు $\beta = -2$

BALABHADRA SURESH

శూన్యాల మొత్తం $= (4) + (-2) = 2 = \frac{-(-2)}{1} = \frac{-(x \text{ యొక్క గుణకం})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{-b}{a}$

శూన్యాల లబ్ధం $= (4) \times (-2) = -8 = \frac{-8}{1} = \frac{\text{స్థిర పదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{c}{a}$

(ii). $4s^2 - 4s + 1$

s^2 యొక్క గుణకం $= a = 4$

s యొక్క గుణకం $= b = -4$

స్థిర పదము $= c = 1$

సాధన: $p(s) = 4s^2 - 4s + 1$

$= 4s^2 - 2s - 2s + 1$

$= 2s(2s - 1) - 1(2s - 1)$

$= (2s - 1)(2s - 1)$

$p(s) = 0$ అనుకొనుము

$(2s - 1)(2s - 1) = 0$

$2s - 1 = 0$ లేదా $2s - 1 = 0$

$2s = 1$ లేదా $2s = 1$

$s = \frac{1}{2}$ లేదా $s = \frac{1}{2}$

$p(s) = 4s^2 - 4s + 1$బహుపది యొక్క శూన్యాలు $\frac{1}{2}$ మరియు $\frac{1}{2}$

శూన్యాల మొత్తం $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1 = \frac{-(-4)}{4} = \frac{-(s \text{ యొక్క గుణకం})}{s^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{-b}{a}$

శూన్యాల లబ్ధం$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{\text{స్థిర పదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{c}{a}$

(iii). $6x^2 - 3 - 7x$

x^2 యొక్క గుణకం $= a = 6$

x యొక్క గుణకం $= b = -7$

స్థిర పదము $= c = -3$

సాధన: $p(x) = 6x^2 - 7x - 3$

$= 6x^2 - 9x + 2x - 3$

$= 3x(2x - 3) + 1(2x - 3)$

$= (2x - 3)(3x + 1)$

BALABHADRA SURESH

$p(x) = 0$ అనుకొనుము

$(2x-3)(3x+1) = 0$

$2x - 3 = 0$ లేదా $3x + 1 = 0$

$2x = 3$ లేదా $3\,x = -1$

$x = \frac{3}{2}$ లేదా $x = \frac{-1}{3}$

$p(x) = 6x^2 - 7x - 3$ బహుపది యొక్క శూన్యాలు $\frac{3}{2}$ మరియు $\frac{-1}{3}$

$\alpha = 4$ మరియు $\beta = -2$

శూన్యాల మొత్తం $= (\frac{3}{2}) + (\frac{-1}{3}) = \frac{9-2}{6} = \frac{7}{6} = \frac{-(-7)}{6} = \frac{-(x \text{యొక్క గుణకం})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{-b}{a}$

శూన్యాల లబ్ధం$= (\frac{3}{2}) \times (\frac{-1}{3}) = \frac{-3}{6} = = \frac{\text{స్థిర పదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{c}{a}$

(iv). $4u^2 + 8u$

u^2 యొక్క గుణకం $= a = 4$
u యొక్క గుణకం $= b = 8$
స్థిర పదము $= c = 0$

సాధన: $P(u) = 4u^2 + 8u$

$= 4u(u+2)$

$p(u) = 0$ అనుకొనుము

$4u(u+2) = 0$

$4u = 0$ *or* $u + 2 = 0$

$u = 0$ *or* $u = -2$

$p(u) = 4u^2 + 8u$ బహుపది యొక్క శూన్యాలు 0 మరియు -2

శూన్యాల మొత్తం $= 0 + (-2) = -2 = \frac{-8}{4} = \frac{-(u \text{ యొక్క గుణకం})}{u^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{-b}{a}$

శూన్యాల లబ్ధం$= 0 \times (-2) = 0 = \frac{0}{4} = \frac{\text{స్థిర పదము}}{u^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{c}{a}$

(v). $t^2 - 15$

t^2 యొక్క గుణకం $= a = 1$
t యొక్క గుణకం $= b = 0$

BALABHADRA SURESH

సాధన: $p(t) = t^2 - 15$

$= t^2 - (\sqrt{15})^2$

$= (t + \sqrt{15})(t - \sqrt{15})$

$p(t) = 0$ అనుకొనుము

$(t + \sqrt{15})(t - \sqrt{15}) = 0$

$t + \sqrt{15} = 0$ లేదా $t - \sqrt{15} = 0$

$t = \sqrt{15}$ లేదా $t = -\sqrt{15}$

$p(t) = t^2 - 15$ బహుపది యొక్క శూన్యాలు $\sqrt{15}$ మరియు $-\sqrt{15}$

శూన్యాల మొత్తం $= \sqrt{15} + (-\sqrt{15}) = 0 = \frac{-0}{1} = \frac{-(t \text{ యొక్క గుణకం})}{t^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{-b}{a}$

శూన్యాల లబ్ధం$= \sqrt{15} \times (-\sqrt{15}) = -15 = \frac{-15}{1} = \frac{\text{స్థిర పదము}}{t^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{c}{a}$

(vi). $3x^2 - x - 4$

సాధన: $p(x) = 3x^2 - x - 4$

$= 3x^2 - 4x + 3x - 4$

$= x(3x - 4) + 1(3x - 4)$

$= (3x - 4)(x + 1)$

x^2 యొక్క గుణకం $= a = 3$

x యొక్క గుణకం $= b = -1$

స్థిర పదము $= c = -4$

$p(x) = 0$ అనుకొనుము

$(3x - 4)(x + 1) = 0$

$3x - 4 = 0$ లేదా $x + 1 = 0$

$3x = 4$ లేదా $x = -1$

$x = \frac{4}{3}$ లేదా $x = -1$

BALABHADRA SURESH

$p(x) = 3x^2 - x - 4$ బహుపది యొక్క శూన్యాలు $\frac{4}{3}$ మరియు -1

$\alpha = 4$ మరియు $\beta = -2$

శూన్యాల మొత్తం $= (\frac{4}{3}) + (-1) = \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3} = \frac{-(-1)}{3} = \frac{-(x \text{ యొక్క గుణకం})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{-b}{a}$

శూన్యాల లబ్ధం $= (\frac{4}{3}) \times (-1) = \frac{-4}{3} = \frac{\text{స్థిర పదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{c}{a}$

2. **ఒక వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాల మొత్తము మరియు లబ్ధాలు వరుసగా ఇవ్వబడినవి .ప్రతీ సందర్భం లోనూ ఆయా వర్గబహుపదులను కనుగొనండి .**

(i). $\frac{1}{4}, -1$

సాధన: శూన్యాల మొత్తం $= \alpha + \beta = \frac{1}{4}$

శూన్యాల లబ్ధం $= \alpha\beta = -1$

వర్గబహుపది $= \mathrm{k}[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

$= k[x^2 - \left(\frac{1}{4}\right)x + (-1)]$

$= k[\,x^2 - \frac{1}{4}x - 1\,]$

k=4 అయినచో

వర్గబహుపది$= 4 \times [\,x^2 - \frac{1}{4}x - 1\,]$

$= 4x^2 - x - 4$

(ii). $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$

సాధన: శూన్యాల మొత్తం $= \alpha + \beta = \sqrt{2}$

శూన్యాల లబ్ధం $= \alpha\beta = \frac{1}{3}$

వర్గబహుపది $= \mathrm{k}[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

$= k[x^2 - \sqrt{2}x + \left(\frac{1}{3}\right)]$

k=3 అయితే

BALABHADRA SURESH

వర్గబహుపది= $3 \times [x^2 - \sqrt{2}x + \left(\frac{1}{3}\right)]$

$= 3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$

(iii). $0, \sqrt{5}$

సాధన: శూన్యాల మొత్తం= $\alpha + \beta = 0$

శూన్యాల లబ్ధం= $\alpha\beta = \sqrt{5}$

వర్గబహుపది = $\mathrm{k}[x^2 - (0)x + \sqrt{5}]$

$= k[x^2 + \sqrt{5}]$

k=1అయితే

వర్గబహుపది= $x^2 + \sqrt{5}$

(iv). 1,1

సాధన: శూన్యాల మొత్తం $= \alpha + \beta = 1$

శూన్యాల లబ్ధం= $\alpha\beta = 1$

వర్గబహుపది $= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

$= k[x^2 - (1)x + 1]$

$= k[x^2 - x + 1]$

k=1 అయినచో

వర్గబహుపది= $[x^2 - x - 1]$

(v). $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

సాధన: శూన్యాల మొత్తం $= \alpha + \beta = -\frac{1}{4}$

శూన్యాల లబ్ధం= $\alpha\beta = \frac{1}{4}$

వర్గబహుపది $= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

$= k\left[x^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)x + \frac{1}{4}\right]$

$= k\left[x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right]$

k=4 అయినచో

వర్గబహుపది $= 4 \times \left[x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right]$

BALABHADRA SURESH

$$= 4x^2 + x + 1$$

(vi). 4,1

సాధన : శూన్యాల మొత్తం $= \alpha + \beta = 4$

శూన్యాల లబ్ధం$= \alpha\beta = 1$

వర్గబహుపది$= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

$$= k[x^2 - (4)x + 1]$$
$$= k[x^2 - 4x + 1]$$

k=1 అయినచో

వర్గబహుపది$= [x^2 - 4x + 1]$

3. ఒక వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాలు α, β లు దిగువ ఇవ్వబడినవి . ప్రతీ సందర్భంలోనూ ఆయా బహుపదులను కనుగొనండి .

(i). 2,-1

సాధన: $\alpha = 2, \beta = -1$

శూన్యాల మొత్తం $= \alpha + \beta = 2 + (-1) = 1$

శూన్యాల లబ్ధం$= \alpha\beta = 2 \times (-1) = -2$

వర్గబహుపది$= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

$$= k[x^2 - (1)x + (-2)]$$
$$= k[x^2 - x - 2]$$

k=1 అయినచో

వర్గబహుపది $= x^2 - x - 2$

(ii). $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

సాధన: $\alpha = \sqrt{3}, \beta = -\sqrt{3}$

శూన్యాల మొత్తం $= \alpha + \beta = \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$

శూన్యాల లబ్ధం$= \alpha\beta = \sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) = -3$

వర్గబహుపది$= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

BALABHADRA SURESH

$= k[x^2 - (0)x + (-3)]$

$= k[x^2 - 3]$

k=1అయినచో వర్గబహుపది $= x^2 - 3$

(iii). $\frac{1}{4}, -1$

సాధన: $\alpha = \frac{1}{4}, \beta = -1$

శూన్యాల మొత్తం $= \alpha + \beta = \frac{1}{4} + (-1) = \frac{1-4}{4} = \frac{-3}{4}$

శూన్యాల లబ్ధం $= \alpha\beta = \frac{1}{4} \times (-1) = -\frac{1}{4}$

వర్గబహుపది$= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

$= k\left[x^2 - \left(\frac{-3}{4}\right)x + (-\frac{1}{4})\right]$

$= k\left[x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right]$

k=4 అయినచో

కావలసిన వర్గబహుపది$= 4 \times \left[x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right]$

$= 4 \times x^2 + 4 \times \frac{3}{4}x - 4 \times \frac{1}{4}$

$= 4x^2 + 3x - 1$

(iv). $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

సాధన: $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{2}$

శూన్యాల మొత్తం $= \alpha + \beta = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$

శూన్యాల లబ్ధం$= \alpha\beta = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

వర్గబహుపది $= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

$= k\left[x^2 - (2)x + \frac{3}{4}\right]$

$= k\left[x^2 - 2x + \frac{3}{4}\right]$

k=4 అయితే

కావలసిన వర్గబహుపది $= 4 \times \left[x^2 - 2x + \frac{3}{4}\right]$

$= 4 \times x^2 - 4 \times 2x - 4 \times \frac{3}{4}$

BALABHADRA SURESH

$= 4x^2 - 8x - 3$

ఘన బహుపదులు :

1. α, β, γ లు ఘన బహుపది $ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ యొక్క శూన్యాలు అయితే

(i). $\alpha + \beta + \gamma = \frac{-(x^2 \text{ యొక్క గుణకం})}{x^3 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{-b}{a}$

(ii). $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{x \text{యొక్క గుణకం}}{x^3 \text{ యొక్క గుణకం}} = \frac{c}{a}$

(iii). $\alpha\beta\gamma = \frac{-(\text{స్థిర పదం})}{x^3 \text{యొక్క గుణకం}} = \frac{-d}{a}$

2. α, β, γ లు శూన్యాలుగా గల ఘన బహుపది

$= k[x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma]$

ఇవి చేయండి (page- 66)

1. α, β మరియు γ అనేవి ఒక ఘన బహుపది యొక్క శూన్యాలయితే $\alpha + \beta + \gamma, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \alpha\beta\gamma$ లను కనుగొనుము .

1) $x^3 - 3x^2 - x - 2$ $[a = 1, b = -3, c = -1, d = -2]$

సాధన : $\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{1} = \frac{3}{1} = 3$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$

$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a} = \frac{-(-2)}{1} = \frac{2}{1} = 2$

2) $4x^3 + 8x^2 - 6x - 2$ $[a = 4, b = 8, c = -6, d = -2]$

సాధన: $\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a} = \frac{-8}{4} = -2$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$

$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a} = \frac{-(-2)}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

3) $x^3 + 4x^2 - 5x - 2$ $[a = 1, b = 4, c = -5, d = -2]$

సాధన : $\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{1} = -4$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} = -5$

$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a} = \frac{-(-2)}{1} = \frac{2}{1} = 2$

BALABHADRA SURESH

4) $x^3 + 5x^2 + 4$ $[a = 1, b = 5, c = 0, d = 4]$

సాధన : $\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{1} = -5$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a} = \frac{-4}{1} = -4$$

ఉదాహరణ -7: ఘన బహుపది $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ యొక్క శూన్యాలు $3, -1$ మరియు $-\frac{1}{3}$ అగునని చూపండి .బహుపది గుణకాలకు శూన్యాలకు మధ్యగల సంబంధాన్ని సరిచూడండి .

సాధన : $P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$

$$\mathrm{P}(3) = 3(3)^3 - 5(3)^2 - 11(3) - 3$$
$$= 3 \times 27 - 5 \times 9 - 33 - 3$$
$$= 81 - 45 - 33 - 3$$
$$= 81 - 81 = 0$$

$$\mathrm{P}(-1) = 3(-1)^3 - 5(-1)^2 - 11(-1) - 3$$
$$= 3 \times (-1) - 5 \times 1 + 11 - 3$$
$$= -3 - 5 + 11 - 3 = -11 + 11 = 0$$

$$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11\left(-\frac{1}{3}\right) - 3$$
$$= 3\left(-\frac{1}{27}\right) - 5\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{11}{3} - 3$$
$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3$$
$$= \frac{-1-5+33-27}{9} = \frac{-33+33}{9} = 0$$

$\mathrm{P}(3) = 0$, $\mathrm{P}(-1) = 0$, మరియు $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$

కావున $3, -1, -\frac{1}{3}$ అనేవి ఘన బహుపది $P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$యొక్క శూన్యాలు అవుతాయి .

$$\alpha = 3, \beta = -1, \gamma = -\frac{1}{3}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(\frac{-1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + (-1) \times \left(\frac{-1}{3}\right) + \left(\frac{-1}{3}\right) \times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(\frac{-1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}$$

BALABHADRA SURESH

(అభ్యాసం -3.3) 4. ఒక ఘన బహుపది $x^3 + 3x^2 - x - 3$ యొక్క శూన్యాలు 1,-1 మరియు -3 అగునని సరిచూడండి . బహుపది గుణకాలకు శూన్యాలకు మధ్యగల సంబంధాన్ని సరిచూడండి

సాధన : $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

x^3యొక్క గుణకం $= a = 1$
x^2యొక్క గుణకం $= b = 3$
xయొక్క గుణకం $= c = -1$
స్థిర పదం $= d = -3$

$p(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 1 - 3$

$= 1 + 3 - 1 - 3 = 4 - 4 = 0$

$p(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - (-1) - 3$

$= -1 + 3 + 1 - 3 = 4 - 4 = 0$

$p(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - (-3) - 3$

$= -27 + 27 + 3 - 3 = 30 - 30 = 0$

$p(1) = 0, p(-1) = 0$ మరియు $p(-3) = 0$

$\therefore 1, -1$ మరియు -3 లు ఘన బహుపది $x^3 + 3x^2 - x - 3$ యొక్క శూన్యాలు అవుతాయి .

$\alpha = 1,\ \beta = -1$ మరియు $\gamma = -3$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 + (-1) + (-3) = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1 \times (-1) + (-1) \times (-3) + (-3) \times 1 = -1 + 3 - 3 = -1 = \frac{-1}{1} = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = 1 \times (-1) \times (-3) = 3 = \frac{-(-3)}{1} = \frac{-d}{a}$$

బహుపదుల భాగహార నియమము

విభాజ్యము = (విభాజకము ×భాగఫలం) + శేషము

```
              భాగఫలం
విభాజకము ) విభాజ్యం
            ________
            శేషము
```

ఉదాహరణ -8. $2x^2 + 3x + 1$ ను $x + 2$ చే భాగించండి

సాధన :

విభాజకము $= x + 2$

విభాజ్యము $= 2x^2 + 3x + 1$

భాగఫలము $= 2x - 1$

శేషము $= 3$

```
           2x  - 1
x + 2 ) 2x² + 3x + 1
        2x² + 4x
      (-)   (-)
      ----------
             -x + 1
             -x - 2
            (+) (+)
            -------
                 3
```

BALABHADRA SURESH

(విభాజకము ×భాగఫలం) + శేషము

$= (x + 2)(2x - 1) + 3$

$= 2x^2 - x + 4x - 2 + 3$

$= 2x^2 + 3x + 1 =$ విభాజ్యము

ఉదాహరణ -9. $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ ను $1 + 2x + x^2$ చే భాగించండి.

సాధన :

విభాజకము $= x^2 + 2x + 1$

విభాజ్యం $= 3x^3 + x^2 + 2x + 5$

భాగఫలం $= 3x - 5$

శేషము $= 9x + 10$

$$
\begin{array}{r}
3x - 5 \\
x^2 + 2x + 1 \overline{) 3x^3 + x^2 + 2x + 5} \\
3x^3 + 6x^2 + 3x \\
(-) \quad (-) \quad (-) \\
\hline
-5x^2 - x + 5 \\
-5x^2 - 10x - 5 \\
(+) \quad (+) \quad (+) \\
\hline
9x + 10 \\
\hline
\end{array}
$$

(విభాజకము × భాగఫలం) +శేషము

$= (x^2 + 2x + 1)(3x - 5) + (9x + 10)$

$= 3x^3 + 6x^2 + 3x - 5x^2 - 10x - 5 + 9x + 10$

$= 3x^3 + x^2 + 2x + 5$

బహుపదులలో భాగహార న్యాయం :

p(x) మరియు g(x) అనేవి రెండు బహుపదులు, g(x) ≠0, అయినపుడు

p(x) = g(x) × q(x) + r(x) అగునట్లు q(x) మరియు r(x) బహుపదులు ఉంటాయి

ఇక్కడ r(x) = 0 లేదా r(x)పరిమాణం < g(x) యొక్క పరిమాణం .

(i) g(x) అనేది ఒక రేఖీయ బహుపది అయిన r(x) = r ఒక స్థిరాంకం .

(ii) q(x) యొక్క పరిమాణం 1, అయిన p(x)యొక్క పరిమాణం = 1 + g(x)యొక్క పరిమాణం అగును .

(iii) p(x) ను (x – a) చే భాగిస్తే వచ్చే శేషం p(a) అగును.

(iv) r = 0 అయితే p(x) ను q(x) ఖచ్చితంగా భాగిస్తుందని లేదా q(x) అనేది p(x)యొక్క కారణాంకం అగునని చెప్పవచ్చు

ఉదాహరణ -10. $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ ను $x - 1 - x^2$ చే భాగించి, భాగహార నియమాన్ని సరిచూడండి .

BALABHADRA SURESH

సాధన :

విభాజ్యం $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$

విభాజకము $= -x^2 + x - 1$

భాగఫలం $= x - 2$

శేషము $= 3$

విభాజ్యం = విభాజకము × భాగఫలం + శేషము

$= (-x^2 + x - 1) \times (x - 2) + 3$

$= -x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - x + 2 + 3$

$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$

భాగాహారం సరిచూడడమైనది .

$$
\begin{array}{r|l}
 & x \;-2 \\
-x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x \\
 & -x^3 + \;x^2 - \;x \\
 & (+)\;\;(-)\;\;(+) \\
\hline
 & \quad 2x^2 - 2x + 5 \\
 & \quad 2x^2 \\
 & \quad (-)\;\;(+)\;\;(-) \\
\hline
 & \qquad\qquad 3 \\
\hline
\end{array}
$$

ఉదాహరణ -11. $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ అను బహుపదికి $\sqrt{2}$ మరియు $-\sqrt{2}$ రెండు శూన్యాలు అయిన మిగిలిన అన్ని శూన్యలను కనుగొనండి .

సాధన : $p(x) = 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$

$\sqrt{2}$ మరియు $-\sqrt{2}$ లు p(x) కు రెండు శూన్యాలు

$(x - \sqrt{2}) \times (x + \sqrt{2}) = x^2 - (\sqrt{2})^2 = x^2 - 2$

P(x) ను $x^2 - 2$ చే భాగించగా

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 1 \\
x^2 - 2 & 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \\
 & 2x^4 \qquad\quad - 4x^2 \\
 & (-) \qquad\quad (+) \\
\hline
 & \quad -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 & \quad -3x^3 \qquad + 6x \\
 & \quad (+) \qquad\;\; (-) \\
\hline
 & \qquad\quad x^2 - 2 \\
 & \qquad\quad x^2 - 2 \\
 & \qquad\; (-)\;\;(+) \\
\hline
 & \qquad\qquad 0 \\
\hline
\end{array}
$$

భాగఫలం $= 2x^2 - 3x + 1$

$= 2x^2 - 2x - x + 1$

$= 2x(x - 1) - 1(x - 1)$

$= (x - 1)(2x - 1)$

శూన్యాల కొరకు $x - 1 = 0$ మరియు $2x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = 1$ మరియు $x = \frac{1}{2}$

BALABHADRA SURESH

బహుపది p(x) యొక్క శూన్యాలు $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1$ మరియు $\frac{1}{2}$.

అభ్యాసం – 3.4

1. కింద ఇవ్వబడిన బహుపదులలో $p(x)$ బహుపదిని $g(x)$ బహుపది చే భాగించి భాగఫలాన్ని, శేషాన్ని కనుగొనం:

$(i)\ p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3, g(x) = x^2 - 2$

భాగఫలం $= x - 3$

శేషము $= 7x - 9$

$$x^2 - 2 \overline{)x^3 - 3x^2 + 5x - 3}\ (x - 3$$
$$x^3 \quad - 2x$$
$$(-) \quad (+)$$
$$-3x^2 + 7x - 3$$
$$-3x^2 \quad + 6$$
$$(+) \quad (-)$$
$$7x - 9$$

$(ii)\ p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5, g(x) = 2 - x^2$

సాధన :

భాగఫలం $= x^2 + x - 3$

శేషము $= 8$

$$x^2 - x + 1 \overline{)x^4 - 3x^2 + 4x + 5}\ (x^2 + x - 3$$
$$x^4 - x^3 + x^2$$
$$(-) \quad (+) \quad (-)$$
$$x^3 - 4x^2 + 4x$$
$$x^3 - x^2 + x$$
$$(-) \quad (+) \quad (-)$$
$$-3x^2 + 3x + 5$$
$$-3x^2 + 3x - 3$$
$$(-) \quad (-) \quad (+)$$
$$8$$

$(iii)\ p(x) = x^4 - 5x + 6, g(x) = 2 - x^2$

సాధన :

భాగఫలం $= -x^2 - 2$

శేషము $= -5x + 10$

$$-x^2 + 2 \overline{)x^4 \quad - 5x + 6}\ (-x^2 - 2$$
$$x^4 - 2x^2$$
$$(-) \quad (+)$$
$$2x^2 - 5x + 6$$
$$2x^2 \quad - 4$$
$$(-) \quad (+)$$
$$-5x + 10$$

2. కింది బహుపదులలో రెండవ బహుపదిని, మొదటి బహుపదిచే భాగించి ప్రతి సందర్భంలో మొదటి బహుపది కారణాంకం అగునో, కాదో సరిచూడండి :

$(i)\ t^2 - 3, 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

Sol:

శేషము $=0$ కావున

$$t^2 - 3 \overline{)2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t}\ (2t^2 + 3t$$
$$2t^4 \quad - 6t^2$$
$$(-) \quad (+)$$
$$3t^3 + 4t^2 - 9t - 12$$
$$3t^3 \quad - 9t$$
$$(-) \quad (+)$$
$$4t^2 \quad 12$$

BALABHADRA SURESH

$t^2 - 3$ బహుపది $2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$ బహుపదికి

కారణాంకం అగును

$(ii)\ x^2 + 3x + 1, 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 - 4x \\
x^2 + 3x + 1 & 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2 \\
 & 3x^4 + 9x^3 + 3x^2 \\
 & (-)\quad (-)\quad (-) \\ \hline
 & -4x^3 - 10x^2 + 2x + 2 \\
 & -4x^3 - 12x^2 - 4x \\
 & (+)\quad (+) \\ \hline
 & 2x^2 + 6x + 2 \\
 & 2x^2 + 6x + 2 \\
 & (-)\quad (-)\quad (-) \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

శేషము $=0$ కావున

$x^2 + 3x + 1$బహుపది $3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$బహుపదికి

కారణాంకం అగును

BALABHADRA SURESH

$(iii) x^3 - 3x + 1, x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

Sol:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 1 \\
x^3 - 3x + 1 & x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1 \\
 & x^5 - 3x^3 + x^2 \\
 & (-)\quad (+)\quad (-) \\ \hline
 & -x^3 \qquad + 3x + 1 \\
 & -x^3 \qquad + 3x - 1 \\
 & (+)\qquad (-)\quad (+) \\ \hline
 & 2
\end{array}
$$

శేషము $=2$ కావున

$x^3 - 3x + 1$ బహుపది $x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$ బహుపదికి

కారణాంకం కాదు

3. $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$, అను బహుపదికి రెండు శూన్యాలు $\sqrt{\frac{5}{3}}$ మరియు $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ అయిన మిగిలిన రెండు శూన్యాలను కనుగొనండి

సాధన : $p(x) = 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$

ఇచ్చిన శూన్యాలు $\sqrt{\frac{5}{3}}$ మరియు $-\sqrt{\frac{5}{3}}$

$i.e. x = \sqrt{\frac{5}{3}}$ మరియు $x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$

$x - \sqrt{\frac{5}{3}} = 0$మరియు $x + \sqrt{\frac{5}{3}} = 0 \Rightarrow \left(x - \sqrt{\frac{5}{3}}\right) \times \left(x + \sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 5 = 0$

$3x^2 - 5$ అనేది $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ కి కారణాంకం అవుతుంది

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x + 1 \\
3x^2 - 5 & 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5 \\
 & 3x^4 \qquad - 5x^2 \\
 & (-) \qquad (+) \\
\hline
 & 6x^3 + 3x^2 - 10x - 5 \\
 & 6x^3 \qquad - 10x \\
 & (-) \qquad (+) \\
\hline
 & 3x^2 - 5 \\
 & 3x^2 - 5 \\
 & (-) \quad (+) \\
\hline
 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

P(x) ను $3x^2 - 5$ చే భాగించగా

భాగఫలం $= x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1)$

శూన్యాల కొరకు $x + 1 = 0$ మరియు $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ మరియు $x = -1$

మిగిలిన రెండు శూన్యాలు $-1, -1$

4. $x^3 - 3x^2 + x + 2$ అను బహుపదిని g(x) అనే బహుపదిచే భాగిస్తే భాగఫలము x – 2 మరియు – 2x + 4, అయిన g(x) ను కనుగొనుము .

సాధన : విభాజ్యము $= p(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$

భాగఫలం$= q(x) = x - 2$

శేషము $= r(x) = -2x + 4$

విభాజకము $= g(x) = ?$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x + 1 \\
x - 2 & x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \\
 & x^3 - 2x^2 \\
 & (-) \quad (+) \\
\hline
 & -x^2 \\
 & -x^2 + 2x
\end{array}
$$

BALABHADRA SURESH

భాగహార నియమము ప్రకారం

p(x) = g(x) q(x) + r(x)

$x^3 - 3x^2 + x + 2 = g(x) \times (x-2) + (-2x+4)$

$x^3 - 3x^2 + x + 2 + 2x - 4 = g(x) \times (x-2)$

$x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = g(x) \times (x-2)$

$$g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}{x-2}$$

$g(x) = x^2 - x + 1$

5. భాగహార నియమము మరియు దిగువ ఇవ్వబడిన నియమాలను తృప్తి పరిచే విధంగా p(x), g(x), q(x) మరియు r(x), బహుపదులకు తగిన ఉదాహరణలను ఇవ్వండి.

(i) p(x) పరిమాణం = q(x) పరిమాణం

సాధన : $p(x) = 4x^2 + 8x + 4$

$q(x) = x^2 + 2x + 1$

p(x) *పరిమాణం* = q(x) *పరిమాణం* =2

$g(x) = 4$ మరియు $r(x) = 0$

(ii) q(x) పరిమాణం = r(x) పరిమాణం

సాధన : $q(x) = x^2 + 2x + 1$

$r(x) = 2x^2 + 3$

$g(x) = x - 2$

$p(x) = (x-2) \times (x^2 + 2x + 1) + 2x^2 + 3$

$= x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2 + 2x^2 + 3$

$= x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

(iii) deg r(x) పరిమాణం = 0

సాధన : $p(x) = x^2 + 5x + 7$

$g(x) = x + 2$

$q(x) = x + 3$

BALABHADRA SURESH

$r(x) = 1$

r(x) పరిమాణం =0

BALABHADRA SURESH