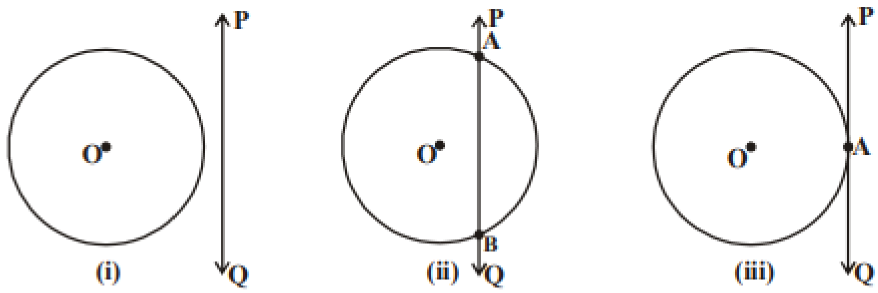
వృత్తాలకు స్పర్శరేఖలు మరియు ఛేదనరేఖలు (నోట్స్)

Prepared by: BALABHADRA SURESH

1.



(i) PQ రేఖకు, వృత్తానికి ఉమ్మడి బిందువు లేదు . ఈ సందర్భం లో PQ ను, వృత్తానికి అఖండిత రేఖ అంటాము .

(ii) PQ రేఖ, వృత్తాన్ని రెండు బిందువులు A మరియు Bల వద్ద ఖండించింది . AB జ్యా ఏర్పడింది. ఈ సందర్భం లో PQ రేఖను వృత్తానికి ఖండిత రేఖా లేదా ఛేదనరేఖ అంటాము .

(iii) PQ రేఖకు వృత్తానికి ఒకే ఒక ఉమ్మడి బిందువు A ఉంది . ఈ సందర్భం లో PQ ను వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అంటాము. A ను స్పర్శబిందువు అంటాము.

2. ఒక వృత్తానికి అనంతమైన స్పర్శరేఖలు గీయవచ్చు .

3. వృత్తానికి బాహ్యంలో ఇచ్చిన బిందువు నుండి రెండు స్పర్శరేఖలు గీయవచ్చు

4. ఒక వృత్తం పై గల ఏదైనా బిందువు గుండా గీయ బడిన స్పర్శరేఖ, ఆ స్పర్శ బిందువు వద్ద వ్యాసార్ధానికి లంబముగా ఉంటుంది.

అభ్యాసము - 9.1

1. కింది ఖాళీలను పూరించండి

(i) వృత్తాన్ని , ఒక స్పర్శరేఖ ఒక(1) బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది

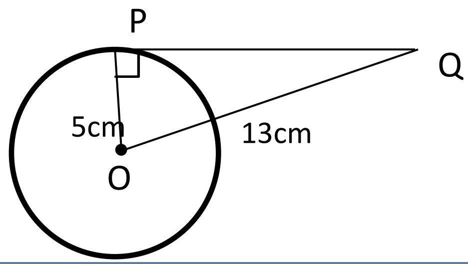
(ii) వృత్తాన్ని , ఒక రేఖ రెండు వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే దానిని ఛేదనరేఖ అంటారు

(iii) ఒక వృత్తానికి వ్యాసం చివరి బిందువుల వద్ద గీయగలిగే సమాంతర స్పర్శరేఖల సంఖ్య 2

(iv) ఒక వృత్తానికి, దాని స్పర్శరేఖకు గల ఉమ్మడి బిందువును స్పర్శ బిందువు అందురు

(v) ఒక వృత్తానికి మనము అనంతమైన స్పర్శరేఖలను గీయగలము .

2. **5 సెం. మీ. వ్యాసార్ధము గా గల వృత్తాన్ని PQ స్పర్శరేఖ P వద్ద తాకింది. వృత్త కేంద్రము O నుండి స్పర్శరేఖ పై గల బిందువు Q నకు దూరము OQ = 13 సెం. మీ. అయిన . PQ పొడవును కనుగొనుము.**



సాధన : వ్యాసార్ధము OP = 5cm మరియు OQ= 13cm

వృత్త వ్యాసార్ధనికి స్పర్శరేఖకు మధ్యగల కోణం $= 90^0$

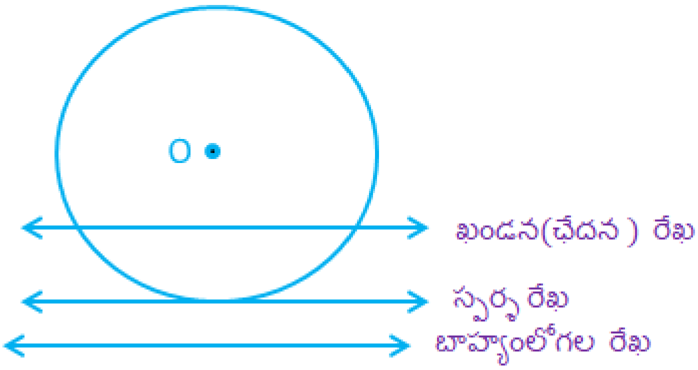
ΔOPQ లో $\angle P = 90^0$

$PQ^2 + OP^2 = OQ^2$

$PQ^2 + 5^2 = 13^2$
$PQ^2 + 25 = 169$
$PQ^2 = 169 - 25 = 144 = 12^2$
$\therefore PQ = 12\ cm$

3. **ఒక వృత్తాన్ని గీయండి వృత్తానికి బాహ్యంలో గల ఒక రేఖకు సమాంతరముగా ఒక స్పర్శరేఖను, ఒక ఛేదన రేఖను గీయండి .**

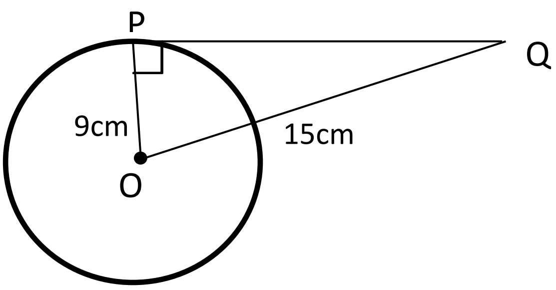
సాధన:



4. **9 సెం. మీ వ్యాసార్ధముగా గల వృత్తానికి ,దాని కేంద్రం నుండి 15 సెం. మీ దూరంలో ఒక బిందువు కలదు. అయిన దానికి గీయబడిన స్పర్శరేఖ పొడవును కనుగొనండి.**

సాధన : వ్యాసార్ధము OP = 9cm మరియు OQ= 15cm

వృత్త వ్యాసార్ధనికి స్పర్శరేఖకు మద్యగల కోణం $= 90^0$



ΔOPQ లో $\angle P = 90^0$
$PQ^2 + OP^2 = OQ^2$
$PQ^2 + 9^2 = 15^2$
$PQ^2 + 81 = 225$
$PQ^2 = 225 - 81 = 144 = 12^2$
$\therefore PQ = 12$ cm

(OR)

వ్యాసార్థం (r)= 9 cm

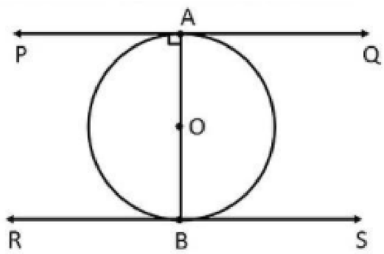
కేంద్రం నుండి బాహ్య బిందువుకు గల దూరం (d) =15 cm

స్పర్శరేఖ పొడవు=$\sqrt{d^2 - r^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12\ cm$

5. **ఒక వృత్త వ్యాసము చివరి బిందువులవద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖలు సమాంతరం అని చూపండి .**

సాధన : **దత్తాంశము** : O కేంద్రంగా గల వృత్తంలో AB ఒక వ్యాసము

PQ , RS లు వ్యాసం చివరి బిందువులు A,Bల వద్ద గీయ బడిన స్పర్శరేఖలు .



సారాంశము : $PQ \parallel RS$

ఉపపత్తి :

స్పర్శరేఖ స్పర్శబిందువు వద్ద దాని వ్యాసార్ధనికి లంబము

$OA \perp PQ$ మరియు $OB \perp RS$

$\angle OAP = 90^0$ మరియు $\angle OBS = 90^0$

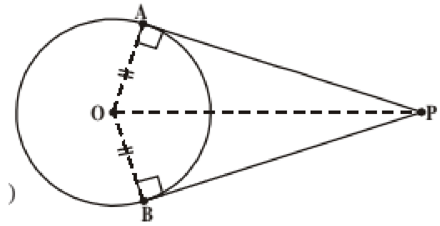
$\Rightarrow \angle BAP = 90^0$ మరియు $\angle ABS = 90^0$

$\Rightarrow \angle BAP = \angle ABS$

$\Rightarrow$ ఏకాంతర కోణాలు సమానము

$\Rightarrow PQ \parallel RS$

సిద్ధాంతము 9.2 : వృత్తానికి బాహ్య బిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శ రేఖల పొడవులు సమానము .



సాధన : **దత్తాంశము** : O కేంద్రంగా గల వృత్తానికి Pఅనే బాహ్య బిందువు నుండి గీయ బడిన స్పర్శ రేఖలు PA మరియు PB

సారాంశము : PA=PB

ఉపపత్తి : OA,OB మరియు OP లను కలిపితిని .

ΔOAP మరియు ΔOBPలలో

$\angle OAP = \angle OBP = 90^0$(వృత్త వ్యాసార్ధానికి స్పర్శరేఖకు మధ్య ఏర్పడిన కోణము)

OA =OB (ఒకే వృత్త వ్యాసార్థాలు)

OP=OP (ఉమ్మడి భుజము)

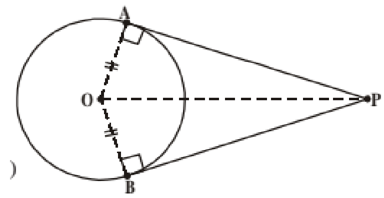
$\Delta OAP \cong \Delta OBP$ (లం. క. భు. సర్వసమాన స్వీకృతం)

$\therefore PA = PB$ (సర్వ సమాన త్రిభుజాలలో సరూప భాగాలు)

నిరూపించబడినది

ప్రయత్నించండి

వృత్తానికి బాహ్య బిందువు నుండి గీయబడిన స్పర్శ రేఖల పొడవులు సమానము అని పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి నిరూపించండి.



సాధన : **దత్తాంశము** : O కేంద్రంగా గల వృత్తానికి Pఅనే బాహ్య బిందువు నుండి గీయ బడిన స్పర్శ రేఖలు PA మరియు PB

సారాంశము : PA=PB

ఉపపత్తి : OA,OB మరియు OP లను కలిపితిని .

ΔOAP మరియు ΔOBPలలో

$\angle OAP = \angle OBP = 90^0$(వృత్త వ్యాసార్ధానికి స్పర్శరేఖకు మధ్య ఏర్పడిన కోణము)

ΔOAP లో $\angle A = 90^0$

$OP^2 = OA^2 + PA^2 \rightarrow (1)$(పైథాగరస్ సిద్ధాంతము)

ΔOBP లో $\angle B = 90^0$

$OP^2 = OB^2 + PB^2 \rightarrow (2)$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతము)

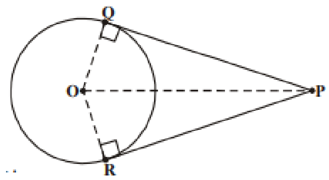
(1) , (2) ల నుండి

$OA^2 + PA^2 = OB^2 + PB^2$

$\Rightarrow PA^2 = PB^2$ ($OA = OB =$ వ్యాసార్ధం)

$\Rightarrow PA = PB$

సమస్య 1:వృత్తానికి బాహ్యబిందువు నుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖల మధ్య ఏర్పడే కోణ సమద్విఖండన రేఖపై ఆ వృత్తం యొక్క కేంద్రం ఉంటుందని నిరూపించండి.



సాధన : 'O' కేంద్రంగా గల వృత్తానికి బాహ్యబిందువు P నుండి గీయ బడిన స్పర్శ రేఖలు PQ మరియు PR

OQ , OR మరియు OP లను కలిపితిని

ΔOQP మరియు ΔORP లలో

$\angle OQP = \angle ORP = 90^0$(వృత్త వ్యాసార్థానికి స్పర్శరేఖకు మధ్య ఏర్పడిన కోణము)

OQ =OR (వ్యాసార్థాలు)

OP=OP (ఉమ్మడి భుజము)

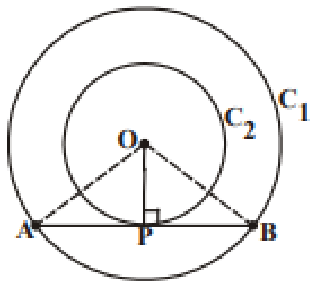
$\Delta OQP \cong \Delta ORP$(లం. క. భు సర్వ సమాన స్వీకృతం)

$\angle OPQ = \angle OPR$(సర్వసమాన త్రిభుజాల సరూప కోణాలు)

కావున OP అనేది $\angle$QPR యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖ అగును .

$\therefore$ వృత్తం యొక్క కేంద్రం స్పర్శరేఖల మధ్య ఏర్పడే కోణ సమద్విఖండన రేఖపై ఉంటుంది

సమస్య 2: రెండు ఏకకేంద్ర వృత్తాలలో బాహ్య వృత్తము యొక్క జ్యా అంతర వృత్తం యొక్కస్పర్శబిందువు వద్ద సమద్వి ఖండన అగును అని చూపుము .



సాధన : C_1 మరియు C_2 అనేవి O కేంద్రంగా గల రెండు వృత్తాలు

C_1 యొక్క జ్యా AB చిన్న వృత్తము C_2 ను P వద్ద తాకింది

OA,OB మరియు OP లను కలిపితిని

ΔAPO మరియు ΔBPO లలో

$\angle APO = \angle BPO = 90^0$ (వృత్త వ్యాసార్థానికి స్పర్శరేఖకు మధ్య ఏర్పడిన కోణము)

$OA = OB$(ఒకే వృత్త వ్యాసార్థాలు)

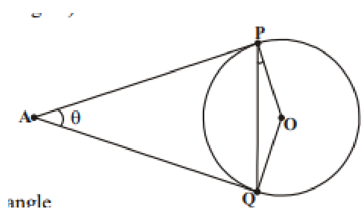
OP=OP (ఉమ్మడి భుజము)

$\Delta APO \cong \Delta BPO$(లం. క. భు సర్వ సమాన స్వీకృతం)

$AP = BP$(సర్వసమాన త్రిభుజాల సరూప భుజాలు)

$\therefore$ స్పర్శ P బిందువు వద్ద జ్యా AB సమద్వి ఖండన అగును.

3: O కేంద్రంగా గల వృత్తానికి బాహ్యబిందువు A నుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖలు AP మరియు AQ అయిన $\angle$ PAQ = 2$\angle$ OPQ =2 $\angle$OQP



సాధన : OP,OQ మరియు PQ లను కలిపితిని .

$\angle PAQ = \theta$ అనుకొనుము

వృత్తానికి బాహ్య బిందువు నుండి గీయబడిన స్పర్శ రేఖల పొడవులు సమానము . AP=AQ,

$\Rightarrow \Delta APQ$ లో $\angle APQ = \angle AQP = \alpha$ (సమాన భుజాలకు ఎదురు కోణాలు సమానం)

$\theta + \alpha + \alpha = 180^0$(త్రిభుజం లోని మూడు కోణముల మొత్తం)

$2\alpha = 180^0 - \theta$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{180^0 - \theta}{2} = 90^0 - \frac{1}{2}\theta$$

$\angle APO = \angle AQO = 90^0$(వృత్త వ్యాసార్ధానికి స్పర్శరేఖకు మధ్య ఏర్పడిన కోణము)

$$\angle OPQ = \angle APO - \angle APQ = 90^0 - \alpha = 90^0 - \left(90^0 - \frac{1}{2}\theta\right) = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PAQ$$

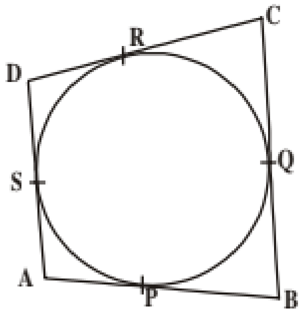
$$\angle OPQ = \frac{1}{2}\angle PAQ \Rightarrow \angle PAQ = 2\angle OPQ$$

అదేవిధంగా $\angle PAQ = 2\angle OQP$

4: ఒక వృత్తము ABCD చతుర్భుజాన్ని P,Q,R,S బిందువుల వద్ద తాకితే AB+CD = BC + DA అని చూపుము

సాధన : వృత్తానికి బాహ్య బిందువు నుండి గీయబడిన స్పర్శ రేఖల పొడవులు సమానము.

AP,AS లు బాహ్య బిందువు A నుండి వృత్తానికి గల స్పర్శరేఖలు



AP = AS -------(1)

అదేవిధంగా

BP = BQ-------(2)

CR = CQ------(3)

DR = DS ------(4)

(1)+(2)+(3)+(4)

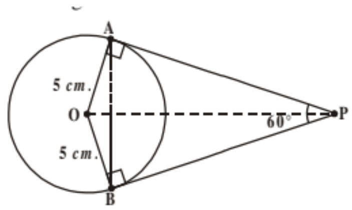
AP+BP+CR+DR = AS+BQ+CQ+DS

(AP+BP)+(CR+DR) = (BQ+CQ)+ (AS+DS)

AB + CD = BC + DA

ఉదాహరణ -1. వృత్త వ్యాసార్థము 5సెం. మీ మరియు రెండు స్పర్శ రేఖల మధ్యకోణము 60°అయిన ఆ వృత్తానికి స్పర్శ రేఖలు గీయండి .

సాధన : 'O' వృత్త కేంద్రము .



చిత్తుపటం

వ్యాసార్థము OA=OB= 5cm మరియు $\angle APB = 60^0$

$\Delta OAP \cong \Delta OBP$ (లం.క.భు సర్వ సమాన స్వీకృతం)

$\angle OPA = \angle OPB = \frac{1}{2} \times \angle APB = \frac{1}{2} \times 60^0 = 30^0$

ΔOAP నుండి $\sin 30^0 = \frac{OA}{OP} = \frac{5}{OP}$

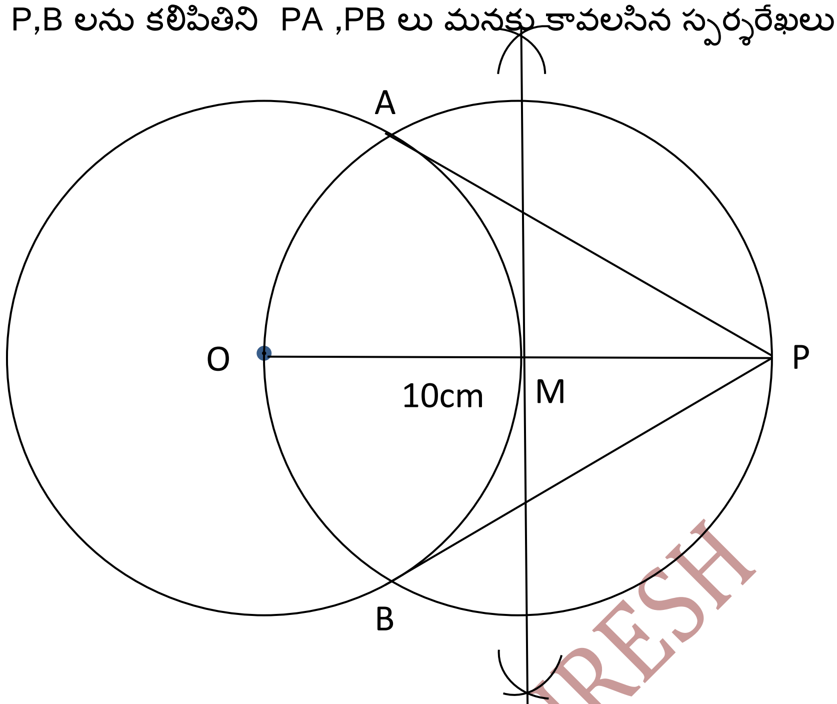
$\frac{1}{2} = \frac{5}{OP} \Rightarrow OP = 5 \times 2 = 10$సెం.మీ

నిర్మాణ సోపానాలు :

1. 'O' కేంద్రముగా 5 సెం. మీ వ్యాసార్థం తో ఒక వృత్తం ను గీచితిని
2. కేంద్రం 'O'నుండి 10 సెం. మీ.దూరంలో P అనే బిందువును గుర్తించి OP కలిపితిని
3. OP కి లంబసమద్వి ఖండన రేఖ గీయగా అది OPని M వద్ద ఖండించినది

4. Mకేంద్రంగా MO=MP వ్యాసార్ధం తో ఒక వృతం గీచితిని అది మొదటి వృత్తాన్ని A,B ల వద్ద ఖండించినది.

5. P,Aమరియు P,B లను కలిపితిని PA ,PB లు మనకు కావలసిన స్పర్శరేఖలు



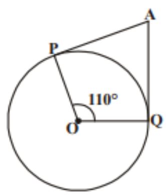
అభ్యాసము - 9.2

(i) ఒక వృత్త స్పర్శరేఖకు, స్పర్శబిందువు గుండా గీచిన వ్యాసార్థానికి మధ్య కోణము **90^0**

(ii) Q, అనే బిందువు నుండి వృత్తం మీదకు గీయబడిన స్పర్శరేఖ పొడవు 24 సెం. మీ . మరియు వృత్త కేంద్రం నుండి Q బిందువుకు గల దూరం 25 సెం. మీ . అయిన వృత్త వ్యాసార్థం **7 సెం. మీ.**

సాధన : వ్యాసార్థం= $\sqrt{d^2 - l^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{625 - 576} = \sqrt{49} = 7$సెం. మీ

(iii) ప్రక్క పటంలో O కేంద్రంగా గల వృత్తానికి AP మరియు AQ లు రెండు స్పర్శరేఖలు మరియు ∠ POQ =110⁰ , అయిన ∠PAQ **= 70^0**



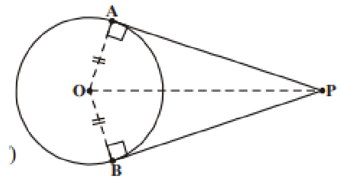
Sol: $\angle APO = \angle AQO = 90^0$(వృత్త వ్యాసార్థానికి స్పర్శరేఖకు మధ్య ఏర్పడిన కోణము)

$\angle APO + \angle AQO + \angle POQ + \angle PAQ = 360^0$(చతుర్భుజం లోని కోణాల మొత్తం)

$90^0 + 90^0 + 100^0 + \angle PAQ = 360^0$

$\angle PAQ = 360^0 - 280^0 = 70^0$

(iv) O కేంద్రం గా వృత్తానికి బాహ్యబిందువు Pనుండి PA మరియు PB అనే రెండు స్పర్శరేఖలు గీయబడ్డాయి. స్పర్శరేఖల మధ్య కోణం 80°, అయిన ∠POA **=50^0**



సాధన : $\angle APB + \angle AOB = 180^0$

$80^0 + \angle AOB = 180^0$

$\angle AOB = 180^0 - 80^0 = 100^0$

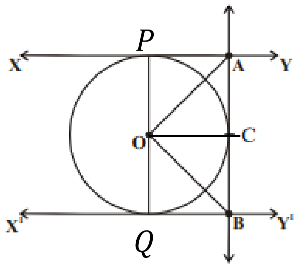
$\angle POA = \angle POB = \frac{100^0}{2} = 50^0$

(v) ప్రక్క పటంలో O కేంద్రం గా వృత్తానికి XY మరియు X^1Y^1 అనే రెండు సమాంతర స్పర్శరేఖలు

గీయబడ్డాయి మరొక స్పర్శ రేఖ AB, స్పర్శ బిందువు C గుండా పోతూ XY ను A వద్ద X^1Y^1 ను B వద్ద ఖండించినది అయిన $\angle AOB =$

సాధన : ΔOPA మరియు ΔOCA లలో

$OP = OC$ (ఒకే వృత్త వ్యాసర్ధాలు)
$AP = AC$(A నుండి గల స్పర్శ రేఖలు)
$OA = OA$(ఉమ్మడి భుజం)
$\Delta OPA \cong \Delta OCA$(భు. భు. భు. సర్వసమాన స్వీకృతం)
$\angle POA = \angle COA$(సర్వసమాన త్రిభుజాల సరూప కోణాలు) $\rightarrow (1)$



అదేవిధంగా

$\angle QOB = \angle COB \rightarrow (2)$
$\angle POA + \angle COA + \angle QOB + \angle COB = 180^0$(రేఖీయ కోణాలు)

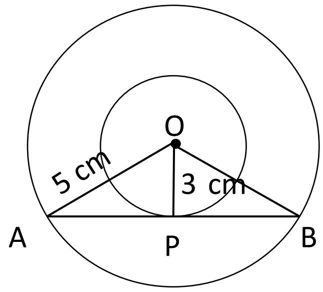
$\angle COA + \angle COA + \angle COB + \angle COB = 180^0$ ((1), (2)నుండి)
$2(\angle COA + \angle COB) = 180^0$
$\angle AOB = \frac{180^0}{2} = 90^0$

2. **5 సెం. మీ. మరియు 3సెం. మీ. వ్యాసార్ధములతో రెండు ఏక కేంద్ర వృత్తాలు గీయబడ్డాయి. చిన్న వృత్తాన్ని స్పర్శించే పెద్ద వృత్తము యొక్క జ్యా పొడవును కనుగొనుము**

సాధన : వృత్త కేంద్రం O . పెద్ద వృత్తము యొక్క జ్యా AB చిన్న వృత్తాన్ని P వద్ద స్పర్శిస్తుంది .

వృత్త వ్యాసర్ధములు OP=3 సెం. మీ. , OA=5 సెం. మీ.

ΔAPO లో $\angle P = 90^0$(వృత్త వ్యాసార్ధానికి స్పర్శరేఖకు మధ్య ఏర్పడిన కోణము)
$AP^2 + OP^2 = OA^2$
$AP^2 + 3^2 = 5^2$
$AP^2 + 9 = 25$
$AP^2 = 25 - 9 = 16 = 4^2$
$AP = 4$ సెం. మీ
అదేవిధంగా BP=4 సెం. మీ



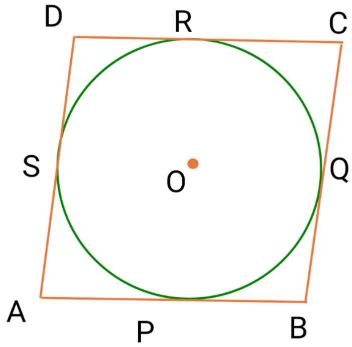
AB=4+4=8 సెం. మీ

3. **ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో వృత్తము అంతర్లిఖించబడిన అది సమచతుర్భుజం అగునని చూపండి .**

సాధన : ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో వృత్తము అంతర్లి ఖించబడింది

సమాంతర చతుర్భుజం వృత్తాన్ని P,Q,R,S ల వద్ద స్పర్శించింది

బాహ్యబిందువు నుండి ఒక వృత్తం పైకి గీయబడిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానం అని తెలుసు



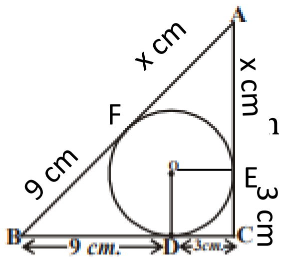
AP = AS ------- (1)
అదేవిధంగా

BP = BQ------- (2)

CR = CQ------ (3)
DR = DS ------ (4)
(1)+ (2) +(3)+(4)
AP+BP+CR+DR = AS+BQ+CQ+DS
(AP+BP)+ (CR+DR) = (BQ+CQ)+ (AS+DS)
AB + CD = BC + DA
AB + AB = BC + BC (సమాంతర చతుర్భుజం లో AB=CD మరియు BC=DA)

2 AB = 2 BC ⇒ AB = BC
∴ AB = BC = CD = DA . కావున ABCD ఒక సమచతుర్భుజం .

4. **త్రిభుజం ABC లో 3 సెం,మీ వ్యాసార్ధం గల ఒక వృత్తము అంతర్లిఖించబడింది స్పర్శ బిందువు D ,BC భుజాన్ని రెండు రేఖా ఖండాలుగా BD =9 సెం. మీ DC =3 సెం. మీ గా విభజించింది అయిన AB మరియు AC భుజాల పొడవులు కనుగొనండి**



సాధన : వ్యాసార్ధం OD=OE=3 సెం. మీ

బాహ్యబిందువు నుండి ఒక వృత్తం పైకి గీయబడిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమ

and BD=BF= 9 సెం. మీ

AF=AE=x (అనుకొనుము)

$AB = (x+9)$సెం.మీ మరియు $AC = (x+3)$సెం.మీ
చతుర్భుజం CDOE లో

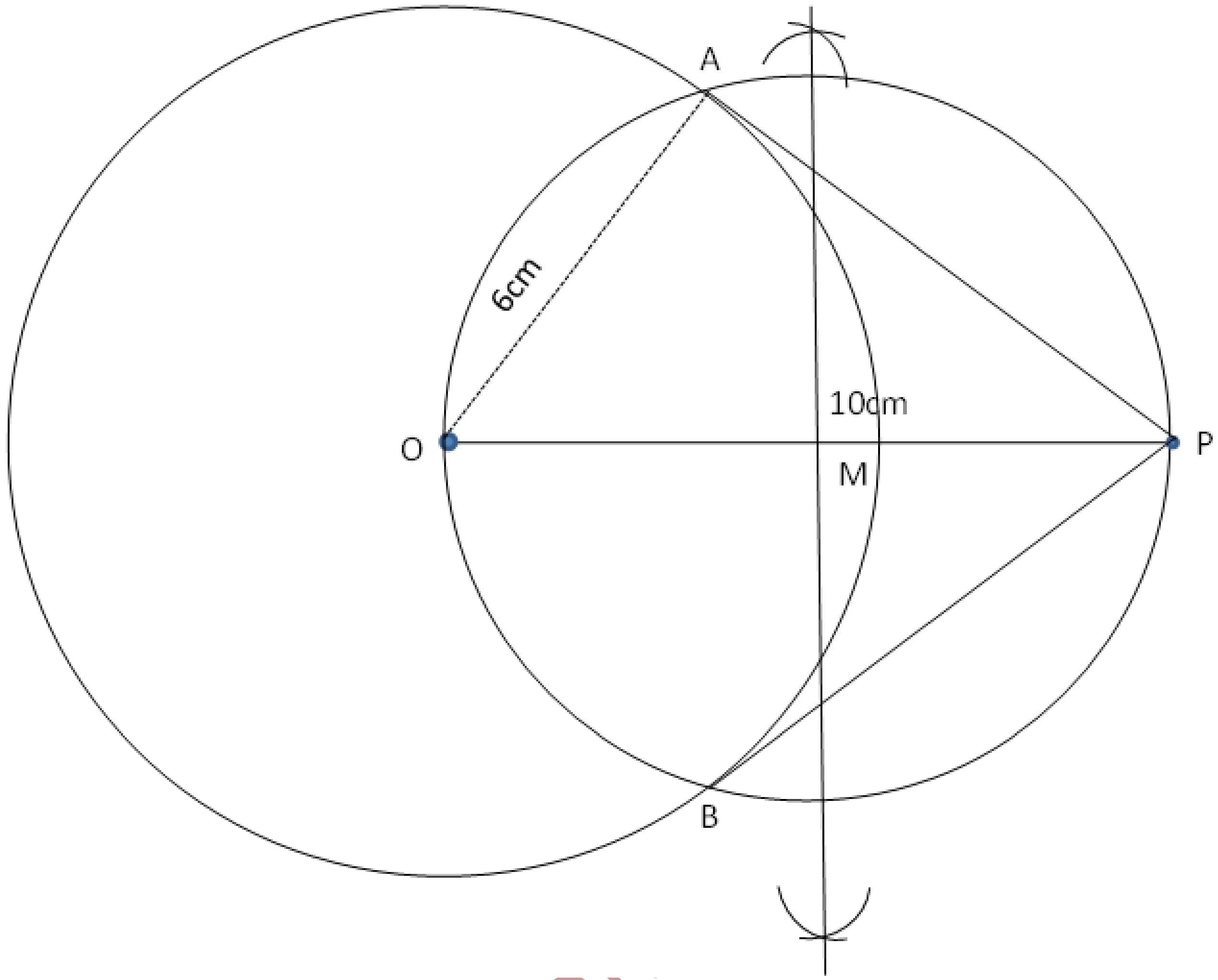
OD=OE=CD=CE=3 సెం. మీ మరియు $\angle CDO = 90^0$

∴ $CDOE$ ఒక చతురస్రం
$\Rightarrow \angle DCE = 90^0$
ΔACB లో $\angle C = 90^0$
$AB^2 = BC^2 + AC^2$(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం)

$(x+9)^2 = 12^2 + (x+3)^2$
$x^2 + 18x + 81 = 144 + x^2 + 6x + 9$
$18x - 6x = 153 - 81$
$12x = 72$
$x = \frac{72}{12} = 6$
$AB = (x+9)$సెం.మీ $= (6+9)$సెం.మీ $= 15$ సెం.మీ
$AC = (x+3)$సెం.మీ $= (6+3)$సెం.మీ $= 9$ సెం.మీ

5. **6 సెం.మీ . వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. కేంద్రం నుండి 10 సెం.మీ దూరం లో బిందువు నుండి ఒక జత స్పర్శరేఖలను గీచి, వాటి పొడవులు కొలవండి. పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ఉపయోగించి సరిచూడండి .**

సాధన :



నిర్మాణ సోపానాలు :

1. 'O' కేంద్రముగా 5 సెం. మీ వ్యాసార్ధం తో ఒక వృత్తం ను గీచితిని.
2. కేంద్రం 'O'నుండి 10 సెం. మీ.దూరంలో P అనే బిందువును గుర్తించి OP కలిపితిని
3. OP కి లంబసమద్వి ఖండన రేఖ గీయగా అది OPని M వద్ద ఖండించినది
4. Mకేంద్రంగా MO=MP వ్యాసార్ధం తో ఒక వృతం గీచితిని అది మొదటి వృత్తాన్ని A,B ల వద్ద ఖండించినది .
5. P,Aమరియు P,B లను కలిపితిని PA ,PB లు మనకు కావలసిన స్పర్శరేఖలు
6. PA=PB=8 సెం . మీ

సరిచూచుట :

OA= 6cm , OP = 10cm $\angle OAP = 90^0$

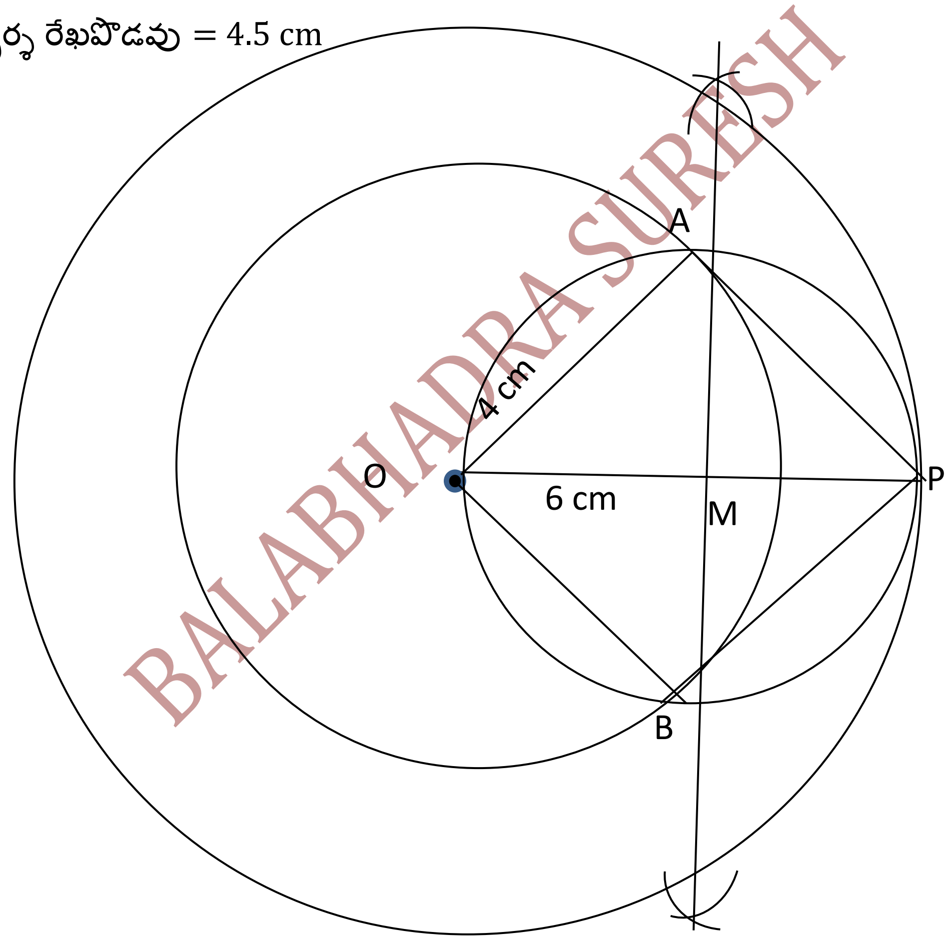
పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $PA^2 + OA^2 = OP^2$

$PA = \sqrt{OP^2 - OA^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ సెం . మీ

6. **4 సెం . మీ వ్యాసార్ధముగా గల వృత్తానికి ,6 సెం . మీ వ్యాసార్ధం గల ఏక కేంద్ర వృత్తం పై గల ఒక బిందువు నుండి స్పర్శ రేఖలను గీయండి. దాని పొడవును కొలవండి. గణన చేసి సరిచూడండి .**

సాధన : **నిర్మాణ సోపానాలు** :

1. O కేంద్రంగా 4cm మరియు 6cm వ్యాసార్ధాలతో రెండు వృత్తాలను గీచితిని
2. పెద్ద వృత్తం పై P అనే బిందువు ను గుర్తించి OP కలిపితిని .
3. OP కి లంబ సమద్వి ఖండన రేఖ గీచితిని అది OP ని M వద్ద ఖండించినది
4. M కేంద్రంగా PM=OM వ్యాసార్ధం తో ఒక వృత్తాన్ని గీచితిని అది చిన్న వృత్తాన్ని A,B ల వద్ద ఖండించినది .
5. PA మరియు PB లను కలిపితిని
6. PA మరియు PB లు మనకు కావలసిన స్పర్శ రేఖలు .
7. స్పర్శ రేఖపొడవు = 4.5 cm



సరిచూడడం :

OA= 4 cm , OP = 6cm

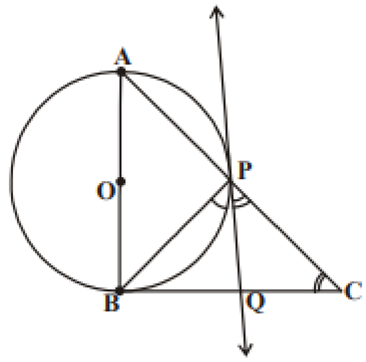
స్పర్శ రేఖపొడవు $= AP = \sqrt{OP^2 - OA^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} \quad = 4.47cm$

8. **ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో AB వ్యాసంగా గల ఒక వృత్తము కర్ణము AC ని P వద్ద ఖండించునట్లు గీయ బడింది. P గుండా వృత్తానికి గీయబడిన స్పర్శరేఖ BC భుజాన్ని సమద్వి ఖండన చేస్తుందని నిరూపించండి .**

సాధన : ΔABC లో $\angle B = 90^0 \Rightarrow QB$ ఒక స్పర్శ రేఖ

QP కూడా స్పర్శ రేఖ.

బాహ్యబిందువు నుండి ఒక వృత్తం పైకి గీయబడిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానం



$$\therefore QB = QP \rightarrow (1)$$

పటం నుండి $\angle QCP = \angle QPC$

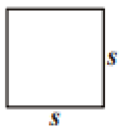
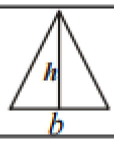
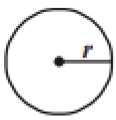
$$\Rightarrow QP = QC \rightarrow (2)$$

(1) ,(2) ల నుండి

$QB = QC$

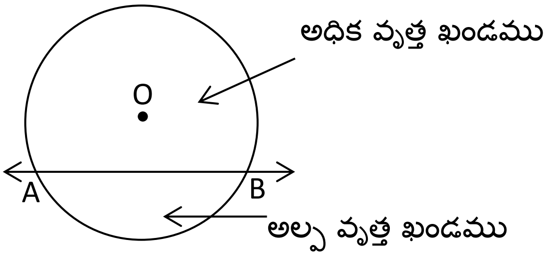
$\Rightarrow PQ$ రేఖ BC భుజాన్ని సమద్వి ఖండన చేస్తుంది

$\Rightarrow P$ గుండా వృత్తానికి గీయబడిన స్పర్శరేఖ BC భుజాన్ని సమద్వి ఖండన చేస్తుంది

వ.సంఖ్య	పటము	కొలతలు	వైశాల్యము
1.		పొడవు $= l$ వెడల్పు $= b$	$A = lb$
2.		భుజము $=$ s	$A = s^2$
3.		భూమి $= b$ ఎత్తు $= h$	$A = \frac{1}{2} bh$
4.		వ్యాసార్థము $= r$	$A = \pi r^2$

ఛేదన రేఖతో ఏర్పడే వృత్తఖండము

ఒక ఛేదన రేఖ వృత్తాన్ని ఖండించినపుడు వృత్తము రెండు భాగాలు అవుతుంది .వీటిని వృత్త ఖండాలు అంటాము



ఇవి చేయండి

1. **వృత్త వ్యాసార్థం 7 సెం. మీ . మరియు దిగువ సెక్టరు కోణాలకు తగినట్లు సెక్టరు వైశాల్యము కనుగొనుము .**

i. $\mathbf{60^0}$

సాధన : వ్యాసార్థము (r) =7 సెం. మీ ; సెక్టరుకోణం $(x^0) = 60^0$

సెక్టరు వైశాల్యము $= \frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2$

$$= \frac{60^0}{360^0} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$
$$= \frac{1}{6} \times 22 \times 7 = \frac{77}{3} \text{ సెం. మీ}^2$$

ii. **30^0**

సాధన: వ్యాసార్ధము (r) =7 సెం. మీ ; సెక్టరుకోణం $(x^0)= 30^0$

సెక్టరు వైశాల్యము $= \frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2$
$$= \frac{30^0}{360^0} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$
$$= \frac{1}{12} \times 22 \times 7 = \frac{77}{6} \text{ సెం. మీ}^2$$

iii. **72^0**

సాధన: వ్యాసార్ధము (r) =7 సెం. మీ

సెక్టరుకోణం $(x^0)= 72^0$

సెక్టరు వైశాల్యము $= \frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2$
$$= \frac{72^0}{360^0} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$
$$= \frac{1}{5} \times 22 \times 7$$
$$= \frac{154}{5} \text{ సెం. మీ}^2$$

ii. iv **90^0**

సాధన: వ్యాసార్ధము (r) =7 సెం. మీ

సెక్టరుకోణం $(x^0)= 90^0$

సెక్టరు వైశాల్యము $= \frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2$
$$= \frac{90^0}{360^0} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$
$$= \frac{1}{4} \times 22 \times 7$$
$$= \frac{77}{2} \text{ సెం. మీ}^2$$

v. **120^0**

సాధన: వ్యాసార్ధము (r) =7 సెం. మీ

సెక్టరుకోణం $(\theta)= 120^0$

సెక్టరు వైశాల్యము $= \frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2$
$$= \frac{120^0}{360^0} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$
$$= \frac{1}{3} \times 22 \times 7$$
$$= \frac{154}{3} \text{ సెం. మీ}^2$$

2. **ఒక గడియారంలో నిమిషాల ముల్లు పొడవు 14 సెం. మీ. 10 నిమిషాలలో ఈ ముల్లుచే ఏర్పడే ప్రదేశ వైశాల్యము కనుగొనుము .**

సాధన: వ్యాసార్ధము (r) =14 సెం. మీ

నిమిషాల ముల్లు 1 నిమిషంలో ఏర్పరచే కోణం $=\frac{360^0}{60} = 6^0$

నిమిషాల ముల్లు 10 నిమిషంలో ఏర్పరచే కోణం $= 10 \times 6^0 = 60^0$

సెక్టరుకోణం $(\theta) = 10 \times 6^0 = 60^0$

సెక్టరు వైశాల్యము $= \dfrac{x^0}{360^0} \times \pi r^2$

$= \dfrac{60}{360^0} \times \dfrac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= \dfrac{1}{6} \times 22 \times 2 \times 14$

$= \dfrac{22 \times 14}{3}$

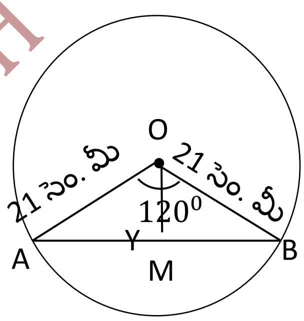
$= \dfrac{308}{3}$ సెం. మీ^{2}

10 నిమిషాలలో ఈ ముల్లుచే ఏర్పడే ప్రదేశ వైశాల్యము $= \frac{308}{3}$ సెం. మీ^{2}

ఉదాహరణ -1. పక్క పటములో వృత్త వ్యాసార్ధము 21 సెం. మీ మరియు ∠ AOB = 120^0 అయిన

వృత్తఖండము AYB వైశాల్యము కనుగొనుము ($\pi = \frac{22}{7}$ మరియు $\sqrt{3} = 1.732$)

సాధన: వృత్త వ్యాసార్ధము (r) =OA=OB=21 సెం. మీ



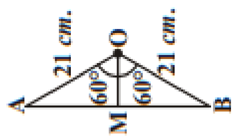
$OM \perp AB$

$\angle AMO = \angle BMO = 90^0$

$\Delta AMO \cong \Delta BMO$(లం. క. భు. సర్వ సమాన స్వీకృతం)

$\angle AOM = \angle BOM = \dfrac{120^0}{2} = 60^0$

ΔAMO నుండి



$\sin 60^0 = \frac{AM}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AM}{21} \Rightarrow AM = \frac{21 \times \sqrt{3}}{2}$ సెం. మీ

$\cos 60^0 = \dfrac{OM}{OA} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{OM}{21} \Rightarrow OM = \dfrac{21}{2}$ సెం. మీ

$AB = 2 \times AM = 2 \times \dfrac{21 \times \sqrt{3}}{2}$ సెం. మీ $= 21\sqrt{3}$ సెం. మీ

$OAYB$ సెక్టరు వైశాల్యము $= \dfrac{x^0}{360^0} \times \pi r^2$

$= \dfrac{120^0}{360^0} \times \dfrac{22}{7} \times 21 \times 21$

$= 462$ సెం. మీ^{2}

$\Delta\, OAB$ వైశాల్యం $= \dfrac{1}{2} \times AB \times OM$

$= \dfrac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \dfrac{21}{2}$

$= \dfrac{441\sqrt{3}}{4}$ సెం. మీ^{2}

$= \dfrac{441 \times 1.732}{4} = 441 \times 0.433 = 190.953$ సెం. మీ^{2}

AYB వృత్తఖండ వైశాల్యం $= OAYB$ సెక్టరు వైశాల్యం $- \Delta\, OAB$ వైశాల్యం

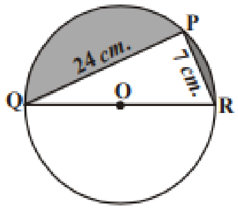
$= 462 - 190.953 = 271.074$ సెం. మీ^{2}

ఉదాహరణ -2. ప్రక్క పటములో O కేంద్రముగా వృత్తములో PQ = 24 సెం. మీ., PR = 7 సెం. మీ. మరియు

వ్యాసము QR అని ఇవ్వబడింది. షేడ్ చేయబడిన వృత్తఖండము వైశాల్యము కనుగొనుము. ($\pi=\frac{22}{7}$)

సాధన: షేడ్ చేయబడిన వృత్తఖండముల వైశాల్యము = OQPR అర్ధవృత్త

వైశాల్యం – ΔPQR వైశాల్యం



$\angle$QPR = 90° (అర్ధవృత్తం లోని కోణం)

$QR^2 = PQ^2 + PR^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం)

$= 24^2 + 7^2$

$= 576 + 49$

$= 625$

$QR = \sqrt{625} = 25$ సెం. మీ

వ్యాసార్ధము (r)=$\frac{25}{2}$ సెం. మీ

$OQPR$ అర్ధవృత్త వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times \pi r^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{25}{2} \times \frac{25}{2}$

$= \frac{6875}{28} = 245.53$ సెం. మీ^{2}

ΔQPR వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times QP \times PR$

$= \frac{1}{2} \times 24 \times 7$

$= 84$ సెం. మీ^{2}

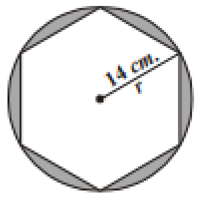
షేడ్ చేయబడిన వృత్తఖండముల వైశాల్యము = 245.53 - 84 = 161.53 సెం. మీ ^{2}

ఉదాహరణ -3. ప్రక్క పటములో చూపిన విధముగా ఒక గుండ్రని ఉపరితలముగల బల్ల పై ఆరు సామాన ఆకృతులు కలవు. బల్ల పై తలము యొక్క వ్యాసార్ధము 14 సెం. మీ. అయిన చ. సెం. మీ ₹5 చొప్పున బల్ల పై గల ఆకృతులకు రంగు వేయడానికి ఎంత ఖర్చు అవుతుంది . ($\sqrt{3} = 1.732$)

సాధన: వృత్తంలో అంతర్లిఖించబడిన క్రమ షడ్భుజి యొక్క భుజము వృత్త వ్యాసార్ధానికి సమానము .

$\therefore$ క్రమ షడ్భుజి యొక్క భుజము = 14 సెం. మీ.

ఆరు వృత్తఖండాల వైశాల్యం = వృత్త వైశాల్యం - క్రమషడ్భుజి యొక్క వైశాల్యం .



వృత్త వైశాల్యం $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= 22 \times 2 \times 14$

$= 616$ సెం. మీ^{2}

క్రమషడ్భుజి యొక్క వైశాల్యం $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2$

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14 \times 14$

$= 294 \times 1.732$

$= 509.21$ సెం. మీ^{2}

ఆరు వృత్తఖండాల వైశాల్యం $= 616 - 509.21 = 106.79$ సెం. మీ^{2}

1 చ. సెం. మీ కు రంగు వేయటకు ఖర్చు $= ₹5$

ఆరు ఆకృతులకు రంగు వేయటకు ఖర్చు $= ₹5 \times 106.79 = ₹533.95$

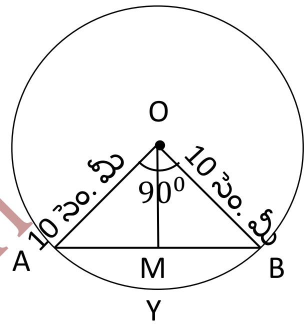
అభ్యాసము - 9.3

1. **10 సెం. మీ వ్యాసార్ధముగా గల వృత్తములో ఒక జ్యా కేంద్రము వద్ద లంబకోణాన్ని ఏర్పరిస్తే, కింద ఇవ్వ బడిన వృత్తఖండాల వైశాల్యములు కనుగొనుము . ($\pi = 3.14$) i. అల్ప వృత్తఖండము ii. అధిక వృత్తఖండము .**

సాధన: $OAYB$సెక్టరు వైశాల్యము $= \frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2$

$= \frac{90^0}{360^0} \times 3.14 \times 10 \times 10$

$= \frac{1}{4} \times 314 = 78.5$ సెం. మీ^{2}



$\Delta\, OAB$ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times OA \times OB$

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50$సెం. మీ^{2}

వృత్త వైశాల్యము $= \pi r^2$

$= 3.14 \times 10 \times 10$

$= 314$ సెం. మీ^{2}

i) అల్ప వృత్తఖండ వైశాల్యము $= OAYB$ సెక్టరు వైశాల్యం $- \Delta\, OAB$ వైశాల్యం

$= 78.5 - 50 = 28.5$ సెం. మీ^{2}

ii) అధిక వృత్తఖండ వైశాల్యము =వృత్త వైశాల్యము−అల్ప వృత్తఖండ వైశాల్యము

$= 314 - 28.5 = 285.5$ సెం. మీ^{2}

2. **12 సెం. మీ. వ్యాసార్ధముగా గల వృత్తములో ఒక జ్యా కేంద్రము వద్ద $120°$ కోణాన్ని ఏర్పరచింది . జ్యాతో ఏర్పడిన సంబంధిత అల్ప వృత్తఖండము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.732$).**

సాధన: వృత్త వ్యాసార్ధం (r) =OA=OB=21 సెం. మీ

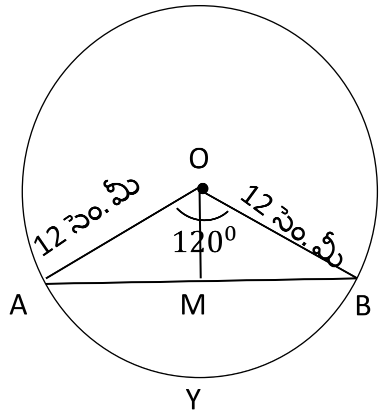
$OM \perp AB$

$\angle AMO = \angle BMO = 90^0$

$\Delta AMO \cong \Delta BMO$(లం. క . భు. సర్వ సమాన స్వీకృతం)

$\angle AOM = \angle BOM = \frac{120^0}{2} = 60^0$

ΔAMO నుండి



$\sin 60^0 = \frac{AM}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AM}{12} \Rightarrow AM = \frac{12 \times \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ సెం. మీ

$\cos 60^0 = \frac{OM}{OA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{OM}{12} \Rightarrow OM = \frac{12}{2} = 6$ సెం. మీ

$AB = 2 \times AM = 2 \times 6\sqrt{3}$సెం. మీ $= 12\sqrt{3}$సెం. మీ

$OAYB$సెక్టరు వైశాల్యము $= \frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2$

$= \frac{120^0}{360^0} \times 3.14 \times 12 \times 12 = 150.72$ సెం. మీ^{2}

$\Delta\, OAB$ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times AB \times OM$

$= \frac{1}{2} \times 12\sqrt{3} \times 6$

$= 36\sqrt{3}$సెం. మీ^{2}

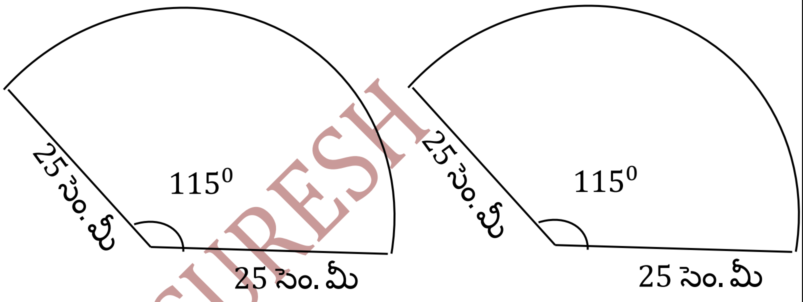
$= 36 \times 1.732 = 62.352$ సెం. మీ^{2}

అల్ప వృత్తఖండము AYB యొక్క వైశాల్యం $= OAYB$ సెక్టరు వైశాల్యం $- \Delta\, OAB$ వైశాల్యం

$= 150.72 - 62.352 = 88.368$ సెం. మీ^{2}

3. **ఒక కారు అద్దముపై ఒకదాని పై ఒకటి అధ్యారోహణము (over lap) కాని నీటిని తుడిచే రెండు వైపర్లు ఉన్నాయి. ప్రతి వైపర్ పొడవు 25 సెం. మీ. 115° కోణముతో నీటిని తుడుస్తున్నది. ఒకేసారి రెండు వైపర్లు పనిచే యు సందర్భములో మొత్తం అద్దాన్ని శుభ్రపరిచే ప్రదేశ వైశాల్యము కనుగొనుము ($\pi = \frac{22}{7}$)**

సాధన:



వైపర్ పొడవు (r) =25 సెం. మీ

వైపర్ చేసే కోణం $(x) = 115^0$

ప్రతి వైపర్ అద్దాన్ని శుభ్రపరిచే ప్రదేశ వైశాల్యము

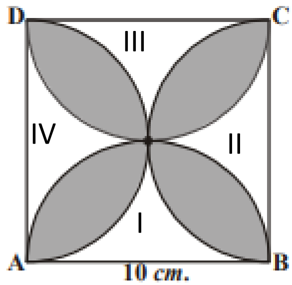
$= \frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2$

$= \frac{115^0}{360^0} \times \frac{22}{7} \times 25 \times 25$

$= 627.48$ సెం. మీ^{2}

రెండు వైపర్లు మొత్తం అద్దాన్ని శుభ్రపరిచే ప్రదేశ వైశాల్యము$=2 \times 627.48 = 1254.96$ సెం. మీ^{2}

4. **ప్రక్క పటములో ABCD చతురస్రం యొక్క భుజము 10 సెం. మీ. పొడవు కలిగి ఉన్నది మరియు చతురస్ర భుజము వ్యాసముగాగల అర్ధ వృత్తాలు ప్రతి భుజము వైపున గీయబడ్డాయి. షేడ్ చేయబడిన ప్రదేశ వైశాల్యము కనుగొనుము ($\pi = 3.14$).**



సాధన: చతురస్ర భుజము (s) =10 సెం. మీ

అర్ధ వృత్త వ్యాసార్ధము (r) $=\frac{10}{2} = 5$సెం. మీ

I ప్రాంత వైశాల్యం $+ III$ప్రాంత వైశాల్యం

$= ABCD$ వైశాల్యం $- 2 \times$ అర్ధ వృత్త వైశాల్యం

$= s^2 - 2 \times \frac{1}{2}\pi r^2$

$= 10 \times 10 - 3.14 \times 5 \times 5$

$= 100 - 78.5$

$= 21.5$ సెం. మీ^{2}

అదేవిధంగా

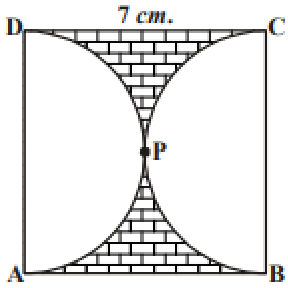
IIప్రాంత వైశాల్యం $+\ IV$ప్రాంత వైశాల్యం $= 21.5$ సెం. మీ^{2}

$\therefore$ షేడ్ చేయని ప్రాంత వైశాల్యం $= 21.5$ సెం. మీ$^2 + 21.5$ సెం. మీ$^2 = 43$సెం. మీ^{2}

షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యం $=$ $ABCD$ వైశాల్యం $-$ షేడ్ చేయని ప్రాంత వైశాల్యం

$= 100 - 43 = 57$ సెం. మీ^{2}

5. **పక్క పటంలో ABCD చతురస్ర భుజము 7 సెం. మీ . మరియు APD మరియు BPC లు అర్థ వృత్తాలు అయిన షేడ్ చేసిన ప్రదేశ వైశాల్యం కనుగొనుము .($\pi = \frac{22}{7}$)**



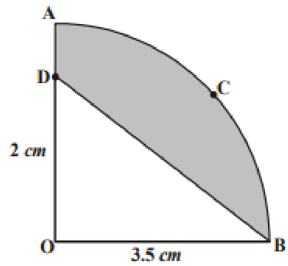
సాధన: చతురస్ర భుజము (s) =7 సెం. మీ

అర్ధ వృత్త వ్యాసార్ధము (r) =$\frac{7}{2}$సెం. మీ

షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యం $=$ $ABCD$ వైశాల్యం $- 2 \times$ అర్ధ వృత్త వైశాల్యం

$$= s^2 - 2 \times \frac{1}{2}\pi r^2$$
$$= 7 \times 7 - \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$$
$$= 49 - 38.5 = 10.5 \text{ సెం. మీ}^2$$

6. **ప్రక్క పటములో 'O' కేంద్రము మరియు 3.5 సెం. మీ. వ్యాసార్థము గాగల వృత్తములో , OACB అనేది ఒక సెక్టరు పాదము OD = 2 సెం. మీ ., అయిన షేడ్ చేసిన ప్రాంత వైశాల్యం కనుగొనుము ($\pi = \frac{22}{7}$)**



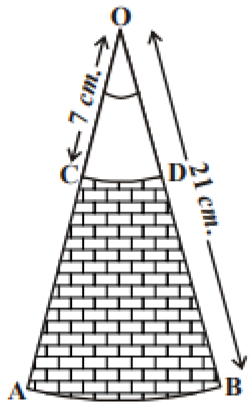
సాధన: సెక్టరు వ్యాసార్ధం (r)=3.5 $= \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$సెం. మీ

సెక్టరు కోణం $(x) = 90^0$

షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యం $=$ $AOBC$ సెక్టరు వైశాల్యము $-$ ΔBOD వైశాల్యం

$$= \frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} \times OB \times OD$$
$$= \frac{90^0}{360^0} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} \times 2$$
$$= \frac{77}{8} - \frac{7}{2}$$
$$= 9.625 - 3.5$$
$$= 6.125 \text{ సెం. మీ}^2$$

7. **'O' కేంద్రముగా గల రెండు ఏక కేంద్ర వృత్తాల వ్యాసర్థాలు వరుసగా 21సెం. మీ . మరియు 7సెం. మీ AB , CD లు రెండు చాపరేఖలు ∠AOB = 30°, అయిన షేడ్ చేసిన ప్రదేశ వైశాల్యమును కనుగొనండి.**



సాధన: సెక్టరు OAB మరియు OCD యొక్క వ్యాసర్ధాలు 21 సెం. మీ మరియు 7 సెం. మీ

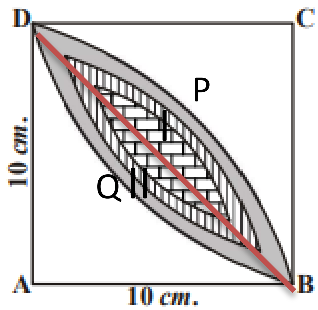
సెక్టరు కోణం ∠AOB = 30°

సెక్టరు వైశాల్యము $= \frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2$

షేడ్ చేసిన ప్రదేశ వైశాల్యము= OAB సెక్టరు వైశాల్యము – OCD సెక్టరు వైశాల్యము

$$= \left(\frac{30^0}{360^0} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21\right) - \left(\frac{30^0}{360^0} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7\right)$$
$$= \frac{1}{12} \times \frac{22}{7}(21 \times 21 - 7 \times 7)$$
$$= \frac{11}{42}(441 - 49)$$
$$= \frac{11 \times 392}{42} = \frac{11 \times 56}{6} = \frac{11 \times 28}{3} = \frac{308}{3} = 102.67 \text{ సెం. మీ}^2$$

8. **పక్క పటంలో వ్యాసార్థము 10 సెం. మీ. గాగల వృత్తంలో రెండు సెక్టరు పాదముల మధ్య ఏర్పడిన ఉమ్మడి ప్రదేశం (షేడ్ చేయబడినది)యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి .($\pi = 3.14$)**



సాధన: I ప్రాంత వైశాల్యం $= ABPD$ సెక్టరు వైశాల్యము $-$ ΔABD వైశాల్యం

$$= \frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} \times AB \times AD$$
$$= \frac{90^0}{360^0} \times 3.14 \times 10 \times 10 - \frac{1}{2} \times 10 \times 10$$
$$= \frac{314}{4} - 50$$
$$= 78.5 - 50$$
$$= 28.5\ cm^2$$

అదేవిధంగా II ప్రాంత వైశాల్యం $=28.5$సెం. మీ^{2}

$\therefore$ కావలసిన ప్రాంత వైశాల్యం $=28.5$ సెం. మీ^{2} $+ 28.5$ సెం. మీ^{2} $= 57$సెం. మీ^{2}