CHAPTER 14

సాంఖ్యక శాస్త్రం (Notes)

PREPARED BY: BALABHADRA SURESH

1. సాంఖ్యక శాస్త్రం పితామహుడు - సర్ రోనాల్డ్ ఎ.ఫిషర్..
2. భారత సాంఖ్యక శాస్త్ర పితామహుడు *పి.సి. మహలనోబిస్.* .
3. కేంద్రీయ స్థాన కొలతలు

   i) అంకగణిత సగటు   ii) బాహుళకము   iii) మధ్యగతం

4. అవర్గీకృత దత్తాంశానికి అంకగణిత సగటు:

   (i) దత్తాంశంలోని రాశులు $x_1, x_2, x_3, \dots\dots\dots, x_n$ అయిన

   $$\text{సగటు } (\bar{x}) = \frac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{రాశుల సంఖ్య}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\dots\dots, +x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}$$

   (ii) దత్తాంశంలోని రాశులు $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ మరియు వాటి పౌనఃపున్యములు వరుసగా $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ అయిన

   $$\text{సగటు}(\bar{x}) = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \cdots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots\dots\dots, +f_n} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

Example-1: కింది పట్టిక నుండి విద్యార్థులు పొందిన మార్కుల సగటు కనుగొనుము .

పొందిన మార్కులు (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

సాధన :

పొందిన మార్కులు (x_i)	విద్యార్థుల సంఖ్య (fi)	f_ix_i
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
మొత్తం	$\sum f_i = 30$	$\sum f_ix_i = 1779$

$$\text{సగటు } (\bar{x}) = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

మార్కుల సగటు = 59.3

BALABHADRA SURESH

వర్గీకృత దత్తాంశం సగటు -ప్రత్యక్ష పద్ధతి :

సగటు $(\bar{x}) = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

$f_i = i$ వ తరగతి పౌనఃపున్యం

$x_i = i$ వ తరగతి మార్కు (తరగతి మధ్యవిలువ)

ఉదాహరణ : క్రింది వర్గీకృత దత్తాంశం సగటు కనుగొనుము .

తరగతి అంతరం	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	3	7	6	6	6

సాధన :

తరగతి అంతరం	విద్యార్థులసంఖ్య (f_i)	తరగతి మధ్యవిలువ (x_i)	$f_i x_i$
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
మొత్తం	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 1860.0$

సగటు $(\bar{x}) = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

$= \frac{1860}{30}$

$= 62$

వర్గీకృత దత్తాంశం సగటు-"విచలన పద్ధతి " లేదా "ఊహించిన సగటు పద్ధతి ":

సగటు $(\bar{x}) = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$a =$ ఊహించిన సగటు (x_i లలో ఒకటి).

$f_i = i$ వ తరగతి పౌనఃపున్యం

$d_i = x_i - a.$

$x_i = i$ వ తరగతి మార్కు (తరగతి మధ్యవిలువ).

ఉదాహరణ : : క్రింది వర్గీకృత దత్తాంశం సగటు కనుగొనుము

తరగతి అంతరం	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	3	7	6	6	6

సాధన :

తరగతి అంతరం	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	తరగతి చిహ్నం (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$ $x_i = a$	$f_i d_i$
10-25	2	17.5	-30	-60
25-40	3	32.5	-15	-45
40-55	7	47.5 (a)	0	0
55-70	6	62.5	15	90
70-85	6	77.5	30	180
85-100	6	92.5	45	270
మొత్తం	$\sum f_i$=30			$\sum f_i d_i = 435$

14.5
30) 435.0
30
135
120
150
150
0

సగటు $(\bar{x}) = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$

వర్గీకృత దత్తాంశం సగటు-"సంక్షిప్త విచలన పద్ధతి" లేదా "సోపానవిచలన పద్ధతి" :

సగటు $(\bar{x}) = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

a = ఊహించిన సగటు (x_i లలో ఒకటి).

f_i = i వ తరగతి పౌనఃపున్యం

$u_i = \frac{x_i - a}{h}$

x_i = i వ తరగతి మార్కు (తరగతి మధ్యవిలువ)

h = తరగతి పొడవు .

ఉదాహరణ : క్రింది వర్గీకృత దత్తాంశం సగటు సంక్షిప్త విచలన పద్ధతి కనుగొనుము

తరగతి అంతరం	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	3	7	6	6	6

Sol:

BALABHADRA SURESH

తరగతి అంతరం	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	తరగతి మధ్య విలువ (x_i)	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10-25	2	17.5	-30	-2	-4
25-40	3	32.5	-15	-1	-3
40-55	7	47.5	0	0	0
55-70	6	62.5	15	1	6
70-85	6	77.5	30	2	12
85-100	6	92.5	45	3	18
మొత్తం	$\sum f_i$=30			$\sum f_i u_i$ =29	

సగటు $(\bar{x}) = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right)$

$= 47.5 + \frac{29}{30} \times 15$

$= 47.5 + \frac{29}{2}$

$= 47.5 + 14.5 = 62$

విద్యార్థులు సాధించిన మార్కుల సగటు = 62

Example-2: కింది పట్టిక నుండి మహిళా ఉపాధ్యాయుల సగటు శాతాన్ని కనుక్కోండి .

మహిళా ఉపాధ్యాయులశాతం	15 - 25	25 - 35	35 – 45	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 – 85
రాష్ట్రాలు లేదా కేంద్రపాలిత ప్రాంతాల సంఖ్య	6	11	7	4	4	2	1

Sol: $a = 50$

మహిళా ఉపాధ్యాయుల శాతం	రాష్ట్రాల/కేంద్ర పాలితప్రాంతాల సంఖ్య	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15 – 25	6	20	-30	-3	120	-180	-18
25 – 35	11	30	-20	-2	330	-220	-22
35 – 45	7	40	-10	-1	280	-70	-7
45 – 55	4	50	0	0	200	0	0
55 – 65	4	60	10	1	240	40	4
65 – 75	2	70	20	2	140	40	4
75 – 85	1	80	30	3	80	30	3
మొత్తం	35				1390	-360	-36

BALABHADRA SURESH

పై పట్టిక నుండి, $\sum f_i = 35, \sum f_i x_i = 1390, \sum f_i d_i = -360, \sum f_i u_i = -36$.

ప్రత్యక్ష పద్ధతి ద్వారా $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

ఊహించిన సగటు పద్ధతి ద్వారా $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 50 + \frac{-360}{35} = 50 - 10.29 = 39.71$

సోపాన విచలన పద్ధతి ద్వారా $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h = 50 + \frac{-36}{35} \times 10 = 39.71$

$\therefore$ గ్రామీణ ప్రాంత ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో గల మహిళా ఉపాధ్యాయుల సగటు శాతము = 39.71.

ఉదాహరణ -3: సరియైన పద్ధతిని ఎంచుకొని బౌలర్లు సాధించిన సగటు వికెట్లను కనుగొనుము .

వికెట్ల సంఖ్య	20 - 60	60 - 100	100 - 150	150 - 250	250 - 350	350 – 450
బౌలర్ల సంఖ్య	7	5	16	12	2	3

సాధన :

వికెట్ల సంఖ్య	బౌలర్ల సంఖ (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$ ($h = 20$)	$f_i u_i$
20 – 60	7	40	-160	-8	-56
60 – 100	5	80	-120	-6	-30
100 – 150	16	125	-75	-3.75	-60
150 – 250	12	200 (a)	0	0	0
250 – 350	2	300	100	5	10
350 – 450	3	400	200	10	30
మొత్తం	$\sum f_i$=45			$\sum f_i u_i$=–146+40=	-106

అందువల్ల $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h = 200 + \frac{-106}{45} \times 20 = 200 - 47.11 = 152.89$

45 మంది బౌలర్లు వన్డే క్రికెట్‌లో సాధించిన వికెట్ల సగటు = 152.89.

అభ్యాసము - 14.1

1. సగటున ఒక ఇంటికి ఎన్ని మొక్కలు నాటినారో కనుక్కోండి .

మొక్కల సంఖ్య	0 - 2	2 - 4	4 – 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 – 14
ఇండ్ల సంఖ్య	1	2	1	5	6	2	3

సాధన :

మొక్కల సంఖ్య	ఇండ్ల సంఖ్య (f_i)	తరగతి మధ్యవిలువ (x_i)	$f_i x_i$
0-2	1	1	1
2-4	2	3	6
4-6	1	5	5
6-8	5	7	35
8-10	6	9	54
10-12	2	11	22
12-14	3	13	39
	$\sum f_i = 20$		$\sum f_i x_i = 162$

$\sum f_i = 20 , \sum f_i x_i = 162$

సగటు $(\bar{x}) = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{162}{20} = 8.1$

2. కర్మాగారం లోని కార్మికుల సగటు భత్యమును కనుక్కోండి .

దినసరిభత్యము (₹)	200 - 250	250 - 300	300 - 350	350 - 400	400– 450
కార్మికుల సంఖ్య	12	14	8	6	10

సాధన :

దినసరి భత్యము	కార్మికుల సంఖ్య (f_i)	తరగతి మధ్యవిలువ (x_i)	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
200-250	12	225	-1	-12
250-300	14	$275 \rightarrow a$	0	0
300-350	8	325	1	8
350-400	6	375	2	12
400-450	10	425	3	30
	$\sum f_i = 50$		$\sum f_i u_i = -12 + 50 = 38$	

$a = 275 , h = 50, \sum f_i = 50, \sum f_i u_i = 38$

సగటు $(\bar{x}) = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

$= 275 + \frac{38}{50} \times 50$

$= 275 + 38$

$= 313$

BALABHADRA SURESH

కర్మాగారం లోని కార్మికుల సగటు భత్యము ₹ 313

3. పిల్లల సగటు చేతి ఖర్చు ₹ 18 అయిన క్రింది పట్టికలో లోపించిన పౌనఃపున్యం (f) ను కనుగొనుము .

పిల్లల రోజువారి చేతిఖర్చు ( )	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
పిల్లల సంఖ్య	7	6	9	13	f	5	4

సాధన :

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం (f_i)	తరగతి మార్కు (x_i)	$f_i x_i$
11-13	7	12	84
13-15	6	14	84
15-17	9	16	144
17-19	13	18	234
19-21	f	20	$20f$
21-23	5	22	110
23-25	4	24	96
	$\sum f_i = 44 + f$		$\sum f_i x_i = 752 + 20f$

పిల్లల సగటు చేతి ఖర్చు =₹ 18

$$\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = 18$$

$$\frac{752 + 20f}{44 + f} = 18$$

$$752 + 20f = 18(44 + f)$$

$$752 + 20f = 792 + 18f$$

$$20f - 18f = 792 - 752$$

$$2f = 40 \quad \Rightarrow f = \frac{40}{2} \quad \therefore f = 20$$

4. క్రింది పట్టిక నుపయోగించి స్త్రీల యొక్క హృదయ స్పందనల సరాసరి (ఒక నిమిషానికి)కనుక్కోండి .

హృదయస్పందనలసంఖ్య/నిమిషం	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
స్త్రీల సంఖ్య	2	4	3	8	7	4	2

సాధన :

హృదయ స్పందనల సంఖ్య /నిమిషం	స్త్రీల సంఖ్య (f_i)	తరగతి మధ్యవిలువ (x_i)	$d_i = x_i - a$	$f_i d_i$
65-68	2	66.5	-9	-18
68-71	4	67.5	-6	-24
71-74	3	72.5	-3	-9
74-77	8	75.5→ a	0	0
77-80	7	78.5	3	21
80-83	4	81.5	6	24
83-86	2	84.5	9	18
	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i d_i = -51 + 63 = 12$	

సగటు $(\bar{x}) = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

BALABHADRA SURESH

$= 75.5 + \frac{12}{30}$
$= 75.5 + \frac{2}{5}$
$= 75.5 + 0.4$
$= 75.9$

5. ఒక్కొక్క పెట్టెలో ఉండే నారింజపండ్ల సగటు కనుక్కోండి . ఏ పద్ధతి ఎంచుకుంటారు .

నారింజపండ్ల సంఖ్య	10-14	15–19	20-24	25-29	30–34
పెట్టెల సంఖ్య	15	110	135	115	25

సాధన: పౌనఃపున్యములు పెద్దగా ఉన్నాయి కావున సంక్షిప్త విచలన పద్ధతి ఎంచుకుంటాను.

నారింజపండ్ల సంఖ్య	పెట్టెల సంఖ్య (f_i)	తరగతి మధ్యవిలువ (x_i)	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10-14	15	12	-10	-2	-30
15-19	110	17	-5	-1	-110
20-24	135	$22 \rightarrow a$	0	0	0
25-29	115	27	5	1	115
30-34	25	32	10	2	50
	$\sum f_i = 400$			$\sum f_i u_i = -140 + 165 = 25$	

$a = 22, h = 5, \sum f_i = 400, \sum f_i u_i = 25$

సగటు $(\bar{x}) = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

$= 22 + \frac{25}{400} \times 5$
$= 22 + \frac{5}{16}$
$= 22 + 0.31$
$= 22.31$

6. తగు పద్ధతిని ఎంచుకొని ఒక్కో కుటుంబానికి అయ్యే సగటు భోజన ఖర్చును కనుక్కోండి .

దినసరిభోజనఖర్చు (₹)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
కుటుంబాల సంఖ్య	4	5	12	2	2

సాధన : తరగతి అంతరాలు పెద్దగా ఉన్నాయి కావున సంక్షిప్త విచలన పద్ధతి ఎంచుకుంటాను

తరగతి అంతరాలు	పౌనఃపున్యం (f_i)	తరగతి మధ్యవిలువ (x_i)	$d_i = (x_i - a)$ a = 225	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
100-150	4	125	-100	-2	-8
150-200	5	175	-50	-1	-5
200-250	12	225	0	0	0
250-300	2	275	50	1	2
300-350	2	325	100	2	4
	$\sum f_i = 25$				$\sum f_i u_i = -7$

$a = 225, h = 50, \sum f_i = 25, \sum f_i u_i = -7$

సగటు $(\bar{x}) = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

$= 225 + \left(\frac{-7}{\cancel{25}}\right) \times \cancel{5}\ 2$

$= 225 + (-7) \times 2$

$= 225 - 14$

$= 211$

ఒక్కో కుటుంబానికి అయ్యే సగటు భోజన ఖర్చు Rs. 211.

7. గాలిలో గల సగటు SO_2 గాఢతను కనుక్కోండి .

SO_2 యొక్క గాఢత (in ppm)	0.00-0.04	0.04-0.08	0.08-0.12	0.12-0.16	0.16-0.20	0.20-0.24
పౌనఃపున్యము	4	9	9	2	4	2

Sol:

SO_2 యొక్క గాఢత	పౌనఃపున్యం (f_i)	తరగతి మధ్యవిలువ (x_i)	$f_i x_i$
0.00-0.04	4	0.02	0.08
0.04-0.08	9	0.06	0.54
0.08-0.12	9	0.10	0.90
0.12-0.16	2	0.14	0.28
0.16-0.20	4	0.18	0.72
0.20-0.24	2	0.22	0.44
	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 2.96$

```
      0.0986
30 )  2.96
      270
     ----
      260
      240
     ----
       200
       180
      ----
        20
      ----
```

$\sum f_i = 30$, $\sum f_i x_i = 2.96$

సగటు $(\bar{x}) = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2.96}{30} = 0.099$

8. క్రింది పట్టిక నుండి ఒక విద్యార్థి సగటు హాజరు ఎంత ?

రోజుల సంఖ్య	35-38	38-41	41-44	44-47	47-50	50-53	53-56
విద్యార్థుల సంఖ్య	1	3	4	4	7	10	11

సాధన :

తరగతి అంతరాలు	పౌనఃపున్యం (f_i)	తరగతి మధ్యవిలువ(x_i)	$(x_i - a)$ a = 48.5	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
35-38	1	36.5	-12	-4	-4
38-41	3	39.5	-9	-3	-9
41-44	4	42.5	-6	-2	-8
44-47	4	45.5	-3	-1	-4
47-50	7	48.5→ a	0	0	0
20-53	10	51.5	3	1	10
53-56	11	54.5	6	2	22
	$\sum f_i = 40$			$\sum f_i u_i = -25 + 32 = 7$	

$a = 48.5,\qquad h = 3$, $\sum f_i = 40$, $\sum f_i u_i = 7$

సగటు $(\bar{x}) = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

$= 48.5 + \frac{7}{40} \times 3$

$= 48.5 + \frac{21}{40}$

$= 48.5 + 0.5$

BALABHADRA SURESH

$= 49$

ఒక విద్యార్థి సగటు హాజరు =49

9. సగటు అక్షరాస్యతా రేటును కనుక్కోండి .

అక్షరాస్యతరేటు (%)	45–55	55-65	65-75	75-85	85-95
పట్టణాల సంఖ్య	3	10	11	8	3

సాధన :

తరగతి అంతరాలు	పౌనఃపున్యం (f_i)	తరగతి మధ్యవిలువ(x_i)	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
45-55	3	50	-2	-6
55-65	10	60	-1	-10
65-75	11	$70 \rightarrow a$	0	0
75-85	8	80	1	8
85-95	3	90	2	6
	$\sum f_i = 35$		$\sum f_i u_i = -16 + 14 = -2$	

$a = 70, \quad h = 10\ , \sum f_i = 35 , \sum f_i u_i = -2$

సగటు $(\bar{x}) = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

$= 70 + \frac{(-2)}{35} \times 10$

$= 70 - \frac{4}{7}$

$= 70 - 0.57 = 69.43$

∴ సగటు అక్షరాస్యతా రేటు=69.43%

అవర్గీకృత దత్తాంశమునకు బాహుళకము:

ఇవ్వబడిన పరిశీలనల్లో లేదా రాసులలో ఎక్కువసార్లు పునరావృతం అయ్యే రాశిని "బాహుళకము" అందురు .

ఉదాహరణ -4 :10 క్రికెట్ మ్యాచ్ లలో ఒక బౌలర్ తీసిన వికెట్లు క్రింది విధంగా ఉన్నాయి 2, 6, 4, 5, 0, 2, 1, 3, 2, 3. ఈ దత్తాంశానికి 'బాహుళకాన్ని'కనుక్కోండి .

సాధన : దత్తాంశము లోని రాసులను ఒక క్రమ పద్ధతి లో అమర్చగా

0, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6

2 ఎక్కువసార్లు పునరావృతం అయినది కావున . బాహుళకము=2

ఇవి చేయండి

1. ఈ క్రింది దత్తాంశానికి 'బాహుళకాన్ని'కనుక్కోండి .

a) 5, 6, 9, 10, 6, 12, 3, 6, 11, 10, 4, 6, 7

Sol: దత్తాంశము లోని రాసులను ఒక క్రమ పద్ధతి లో అమర్చగా

3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 9, 10, 10, 11, 12

6 ఎక్కువసార్లు పునరావృతం అయినది కావున . బాహుళకము=6

b) 20, 3, 7, 13, 3, 4, 6, 7, 19, 15, 7, 18, 3.

Sol: దత్తాంశము లోని రాసులను ఒక క్రమ పద్ధతి లో అమర్చగా

3, 3, 3, 4, 6, 7, 7, 7, 13, 15, 18, 19, 20.

BALABHADRA SURESH

3,7 ఎక్కువసార్లు పునరావృతం అయ్యాయి కావున . బాహుళకము = 3 మరియు 7

c) 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6 Sol: బాహుళకము లేదు .

వర్గీకృత దత్తాంశానికి "బాహుళకము" కనుగొనుట :

గరిష్ఠ పౌనఃపున్యం ఉన్న తరగతిని బాహుళక తరగతిగా తీసుకోవాలి

$$\text{బాహుళకము} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

ఇచ్చట l = బాహుళక తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు .

f_1 = బాహుళక తరగతికి యొక్క పౌనఃపున్యం

f_0 = బాహుళక తరగతికి ముందున్న తరగతి యొక్కపౌనఃపున్యం

f_2 = బాహుళక తరగతికి తరువాత నున్న తరగతి యొక్కపౌనఃపున్యం

h = బాహుళక తరగతి యొక్క

ఉదాహరణ -5:క్రింది దత్తాంశానికి "బాహుళకము" కనుగొనుము .

కుటుంబపరిమాణం	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
కుటుంబాల సంఖ్య	7	8	2	2	1

సాధన: . గరిష్ఠ పౌనఃపున్యం = 8 కావున బాహుళక తరగతి = 3-5

కుటుంబపరిమాణం	కుటుంబాల సంఖ్య
1-3	7→ f_0
l =3-5	8→ f_1
5-7	2→ f_2
7-9	2
9-11	1

$l = 3, f_1 = 8, f_0 = 7, f_2 = 2, h = 2$

$$\text{బాహుళకము} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$
$$= 3 + \left(\frac{8-7}{2 \times 8 - 7 - 2}\right) \times 2$$
$$= 3 + \left(\frac{1}{7}\right) \times 2$$
$$= 3 + \frac{2}{7} == 3 + 0.286$$

ఉదాహరణ-6: ఈ క్రింది దత్తాంశమునకు బాహుళకమును కనుగొనుము .బాహుళకము మరియు సగటులను పోల్చి ,వ్యాఖ్యానించుము .

తరగతి అంతరం	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
పౌనఃపున్యం	2	3	7	6	6	6

సాధన :

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం (f_i)	తరగతి మార్కు	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$ h = 15	$f_i u_i$
10-25	2	17.5	-30	-2	-4
25-40	3→ f_0	32.5	-15	-1	-3
40-55	7→ f_1	47.5 → a	0	0	0
55-70	6→ f_2	62.5	15	1	6
70-85	6	77.5	30	2	12
85-100	6	92.5	45	3	18
Total	$\sum f_i$=30				$\sum f_i u_i$=29

BALABHADRA SURESH

బాహుళకము : గరిష్ఠ పౌనఃపున్యం=7. కావున బాహుళక తరగతి=40-55

$$l = 40, f_1 = 7,\ f_0 = 3, f_2 = 6, h = 15$$

$$\text{బాహుళకము} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{7-3}{2 \times 7 - 3 - 6}\right) \times 15$$

$$= 40 + \frac{4}{5} \times 15$$

$$= 40 + 4 \times 3$$

$$= 40 + 12 = 52$$

$$\text{సగటు } (\bar{x}) = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$$

$$= 47.5 + \frac{29}{30} \times 15$$

$$= 47.5 + \frac{29}{2}$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

వ్యాఖ్యానం : బాహుళకము $= 52$ మరియు సగటు $= 62$. అనగా తరగతిలోని 52 మార్కులు పొందిన విద్యార్థులు ఎక్కువ మంది ఉన్నారు ,ఒక్కొక్క విద్యార్ధి యొక్క సగటు మార్కులు 62.

అభ్యాసం - 14.2

1. క్రింది దత్తాంశానికి సగటు మరియు బాహుళకములను కనుగొనుము . అదేవిధంగా అట్టి కేంద్ర స్థాన విలువలను పోల్చి వ్యాఖ్యానించుము .

వయస్సు (సం॥లలో)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
రోగుల సంఖ్య	6	11	21	23	14	5

సాధన :

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం (f_i)	తరగతి మధ్యవిలువ (x_i)	$f_i x_i$
5-15	6	10	60
15-25	11	20	220
25-35	21→ f_0	30	630
35-45	23→ f_1	40	920
45-55	14→ f_2	50	700
55-65	5	60	300
	$\sum f_i = 80$		$\sum f_i x_i = 2830$

బాహుళకము : గరిష్ఠ పౌనఃపున్యం=23. కావున బాహుళక తరగతి=35-45

$$l = 35, f_1 = 23,\ f_0 = 21, f_2 = 14, h = 10$$

$$\text{బాహుళకము} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 35 + \left(\frac{23 - 21}{2 \times 23 - 21 - 14}\right) \times 10$$

$$= 35 + \left(\frac{2}{46 - 35}\right) \times 10$$

$$= 35 + \frac{20}{11} = 35 + 1.8 = 36.8$$

BALABHADRA SURESH

సగటు $(\bar{x}) = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2380}{80} = 35.37$

వ్యాఖ్యానం : బాహుళకము = 36.8 మరియు సగటు = 35.57. అనగా వైద్యశాలలో 36.8 సం||లు వయస్సు గల రోగులు ఎక్కువ మంది ఉన్నారు .రోగుల యొక్క సగటు వయస్సు 35.37 సం ||లు .

2. క్రింది పట్టిక నుండి విద్యుత్ పరికరాల జీవితకాల బహుళకాన్ని కనుగొనుము .

జీవితకాలం (గంటలలో)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
పౌనఃపున్యం	10	35	52	61	38	29

సాధన ::

జీవితకాలం (గంటలలో)	పౌనఃపున్యం
0-20	10
20-40	35
40-60	52→ f_0
60-80	61→ f_1
80-100	38→ f_2
100-120	29

గరిష్ఠ పౌనఃపున్యం=61.

కావున బాహుళక తరగతి=60-80

$l = 60, f_1 = 61,\ f_0 = 52, f_2 = 38, h = 20$

బాహుళకము $= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$= 60 + \left(\frac{61 - 52}{2 \times 61 - 52 - 38}\right) \times 20$

$= 60 + \left(\frac{9}{122 - 90}\right) \times 20$

$= 60 + \frac{9 \times 20}{32}$

$= 60 + \frac{45}{8} = 60 + 5.625 = 65.625$ గంటలు

3. క్రింది పట్టిక నుండి కుటుంబాల నెలసరి ఖర్చుల బాహుళకాన్ని కనుక్కోండి . అదేవిధంగా నెలసరి సరాసరి ఖర్చును కనుక్కోండి .

నెలసరి ఖర్చు (రూపాయలలో)	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
కుటుంబాల సంఖ్య	24	40	33	28	30	22	16	7

సాధన :

నెలసరి ఖర్చు (రూపాయలలో)	పౌనఃపున్యం (f_i)	తరగతి మధ్యవిలువ(x_i)	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
1000-1500	24→ f_0	1250	-4	-96
1500-2000	40→ f_1	1750	-3	-120
2000-2500	33→ f_2	2250	-2	-66
2500-3000	28	2750	-1	-28
3000-3500	30	3250→ a	0	0
3500-4000	22	3750	1	22
4000-4500	16	4250	2	32
4500-5000	7	4750	3	21
	$\sum f_i = 200$		$\sum f_i u_i = -310 + 75 = -235$	

బాహుళకము : గరిష్ఠ పౌనఃపున్యం=40. కావున బాహుళక తరగతి=1500-2000

$l = 1500, f_1 = 40,\ f_0 = 24, f_2 = 33, h = 500$

$$\text{బాహుళకము} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 1500 + \left(\frac{40 - 24}{2 \times 40 - 24 - 33}\right) \times 500$$

$$= 1500 + \left(\frac{16}{80 - 57}\right) \times 500$$

$$= 1500 + \frac{16 \times 500}{23}$$

$$= 1500 + \frac{8000}{23} = 1500 + 347.83 = 1847.83$$

సగటు (సరాసరి):

$a = 3250, \quad h = 500\ ,\ \sum f_i = 200\ , \sum f_i u_i\ = -235$

$$\text{సరాసరి } (\bar{x}) = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$$

$$= 3250 + \left(\frac{-235}{200}\right) \times 500$$

$$= 3250 - \frac{235 \times 5}{2}$$

$$= 3250 - \frac{1175}{2} = 3250 - 587.5 = 2662.5$$

4. క్రింది దత్తాంశానికి బాహుళకము మరియు సగటులను కనుగొనుము . అదేవిధంగా అట్టి కేంద్ర స్థాన విలువలను పోల్చి వ్యాఖ్యానించుము.

విద్యార్థుల సంఖ్య	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
రాష్ట్రాల సంఖ్య	3	8	9	10	3	0	0	2

సాధన :

విద్యార్థుల సంఖ్య	రాష్ట్రాల సంఖ్య (f_i)	తరగతి మధ్యవిలువ (x_i)	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
15-20	3	17.5	-3	-9
20-25	8	22.5	-2	-16
25-30	9→ f_0	27.5	-1	-9
30-35	10→ f_1	32.5→ a	0	0
35-40	3→ f_2	37.5	1	3
40-45	0	42.5	2	0
45-50	0	47.5	3	0
50-55	2	52.5	4	8
	$\sum f_i = 35$		$\sum f_i u_i\ = -34 + 11 = -23$	

బాహుళకము : గరిష్ఠ పౌనఃపున్యం=10. కావున బాహుళక తరగతి=30-35

$l = 30, f_1 = 10,\ f_0 = 9, f_2 = 3, h = 5$

$$\text{బాహుళకము} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 30 + \left(\frac{10 - 9}{2 \times 10 - 9 - 3}\right) \times 5$$

$$= 30 + \left(\frac{1}{20 - 12}\right) \times 5$$

BALABHADRA SURESH

$$= 30 + \frac{5}{8} = 30 + 0.625 = 30.625$$

సగటు :

$a = 32.5, \quad h = 5 \ , \sum f_i = 35 \, , \sum f_i u_i = -23$

సగటు $(\bar{x}) = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

$$= 32.5 + \left(\frac{-23}{35}\right) \times 5$$

$$= 32.5 - \frac{23}{7} = 32.5 - 3.3 = 29.2$$

వ్యాఖ్యానం : బాహుళకము = 30.625 మరియు సగటు = 29.2. అనగా ఎక్కువ పాఠశాలల్లో ఉపాధ్యాయ –విద్యార్థి నిష్పత్తి 30.625 గా ఉంది . సరాసరి వారి నిష్పత్తి 29.2 గా ఉంది .

5. క్రింది దత్తాంశమునకు బాహుళకము కనుగొనుము .

పరుగులు	3000-4000	4000-5000	5000-6000	6000-7000	7000-8000	8000-9000	9000-10000	10000-11000
బ్యాట్స్‌మెన్‌ల సంఖ్య	4	18	9	7	6	3	1	1

సాధన:

పరుగులు	బ్యాట్స్ మెన్ ల సంఖ్య
3000-4000	4→ f_0
4000-5000	18→ f_1
5000-6000	9→ f_2
6000-7000	7
7000-8000	6
8000-9000	3
9000-10000	1
10000-11000	1

గరిష్ఠ పౌనఃపున్యం=18.

కావున బాహుళక తరగతి 4000-5000

.

$l = 4000, f_1 = 18, \ f_0 = 4, f_2 = 9, h = 1000$

బాహుళకము $= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$$= 4000 + \left(\frac{18 - 4}{2 \times 18 - 4 - 9}\right) \times 1000$$

$$= 4000 + \left(\frac{14}{36 - 13}\right) \times 1000$$

$$= 4000 + \frac{14000}{23} = 4000 + 608.7$$

$= 4608.7$ పరుగులు

6. క్రింది దత్తాంశమునకు బాహుళకము కనుగొనుము.

కార్ల సంఖ్య	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
పౌనఃపున్యం	7	14	13	12	20	11	15	8

సాధన ::

కార్ల సంఖ్య	పౌనఃపున్యం
0-10	7
10-20	14
20-30	13
30-40	12→ f_0
40-50	20→ f_1
50-60	11→ f_2

BALABHADRA SURESH

60-70	15
70-80	8

గరిష్ఠ పౌనఃపున్యం=20. కావున బాహుళక తరగతి 40-50

$l = 40, f_1 = 20,\ f_0 = 12, f_2 = 11, h = 10$

బాహుళకము $= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$$= 40 + \left(\frac{20 - 12}{2 \times 20 - 12 - 11}\right) \times 10$$

$$= 40 + \left(\frac{8}{40 - 23}\right) \times 10 = 40 + \frac{80}{17} = 40 + 4.7 = 44.7$$ కార్లు

అవర్గీకృత దత్తాంశానికి మధ్యగతము :

1. ఇవ్వబడిన దత్తాంశములోని రాశుల లేదా పరిశీలనాంశాల యొక్క మధ్యవిలువను మధ్యగతము అందురు .
2. ఇవ్వబడిన n రాశులను ఆరోహణ క్రమం లో అమర్చుకోవాలి .
   a. n బేసి సంఖ్య అయితే మధ్యగతము=$\left(\frac{n+1}{2}\right)$ వ రాశి అవుతుంది .
   b. n సరి సంఖ్య అయితే మధ్యగతము = $\left(\frac{n}{2}\right)$ వ రాశి మరియు $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ వ రాశుల సరాసరి

   n సరి సంఖ్య అయితే మధ్యగతము = $\dfrac{\left(\frac{n}{2}\right) \text{ వ రాశి} + \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{ వ రాశి}}{2}$

ఉదాహరణ : క్రింది దత్తాంశమునకు మధ్యగతము కనుగొనుము .

సాధించిన మార్కులు	20	29	28	33	42	38	43	25
విద్యార్థుల సంఖ్య	6	28	24	15	2	4	1	20

సాధన :

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య	సంచిత పౌనఃపున్యము
20	6	6
25 వరకు	6 + 20 = 26	26
28 వరకు	26 + 24 = 50	50
29 వరకు	50 + 28 = 78	78
33 వరకు	78 + 15 = 93	93
38 వరకు	93 + 4 = 97	97
42 వరకు	97 + 2 = 99	99
43 వరకు	99 + 1 = 100	100

ఇక్కడ 'n'=100. ఇది ఒక సరి సంఖ్య

$\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$ మరియు $\frac{n}{2} + 1 = 50 + 1 = 51$

50 వ రాశి = 28 మరియు 51 వ రాశి =29

ANDHRA PRADESH SURESH

మధ్యగతము $= \frac{28+29}{2} = \frac{57}{2} = 28.5$

వర్గీకృత దత్తాంశానికి మధ్యగతము

ఏ తరగతి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యం $\frac{n}{2}$ ను మొదటిసారి అధిగమిస్తుందో ఆ తరగతిని మధ్యగత తరగతిగా తీసుకోవాలి .

మధ్యగతము $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

ఇందులో l = మధ్యగత తరగతి దిగువ హద్దు ,

n = దత్తాంశంలోని రాశుల సంఖ్య ,

cf = మధ్యగత తరగతి ముందు తరగతి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యం ,

f = మధ్యగత తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం,

h = మధ్యగత తరగతి పొడవు .

ఉదాహరణ :క్రింది దత్తాంశానికి మధ్యగతము కనుగొనుము .

మార్కులు	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
విద్యార్థుల సంఖ్య	5	3	4	3	3	4	7	9	7	8

Sol:

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	సంచిత పౌనఃపున్యం (cf)
0-10	5	5
10-20	3	8
20-30	4	12
30-40	3	15
40-50	3	18
50-60	4	$22 \rightarrow cf$
60-70	$7 \rightarrow f$	29
70-80	9	38
80-90	7	45
90-100	8	53
	n = 53	

$\frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5.$

సంచిత పౌనఃపున్యం నుండి $\frac{n}{2} = 26.5$ మొదటిసారి దాటిన సంచిత పౌనఃపున్యం = 29

మధ్యగత తరగతి $= 60 - 70$

$l = 60, \quad cf = 22, \quad f = 7, \quad h = 10$

మధ్యగతము $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

$$= 60 + \left(\frac{26.5 - 22}{7}\right) \times 10$$

$$= 60 + \left(\frac{4.5}{7}\right) \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7} = 60 + 6.43 = 66.43$$

BALABHADRA SURESH

ఉదాహరణ – 7 : క్రింది దత్తాంశమునుండి బాలికల ఎత్తుల మధ్యగతము కనుగొనుము .

ఎత్తు (సెం.మీలలో)	బాలికల సంఖ్య
140 కన్నా తక్కువ	4
145 కన్నా తక్కువ	11
150 కన్నా తక్కువ	29
155 కన్నా తక్కువ	40
160 కన్నా తక్కువ	46
165 కన్నా తక్కువ	51

సాధన :

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యము	సంచిత పౌనఃపున్యము
140 కన్నా తక్కువ	4	4
140-145	7	11 $\rightarrow cf$
$l \leftarrow$ 145-150	18 $\rightarrow f$	29
150-155	11	40
155-160	6	46
160-165	5	51

n =51, $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$. కావున మధ్యగత తరగతి =145 - 150

$l = 145, \quad cf = 11, \; f = 18, \; h = 5$

మధ్యగతము $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

$= 145 + \left(\frac{25.5 - 11}{18}\right) \times 5$

$= 145 + \frac{14.5 \times 5}{18}$

$= 145 + \frac{72.5}{18} = 145 + 4.03 = 149.03$

బాలికల పొడవుల యొక్క మధ్యగతము = 149.03 సెం. మీ .

ఉదాహరణ -8: క్రింది దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము 525 మరియు దత్తాంశం లోని రాశుల మొత్తం 100 అయిన x, y విలువలను కనుగొనండి .

BALABHADRA SURESH

CI	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000
Fr	2	5	x	12	17	20	y	9	7	4

సాధన :

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం (f)	సంచిత పౌనఃపున్యం (cf)
0-100	2	2
100-200	5	7
200-300	x	7+x
300-400	12	19+x
400-500	17	36+x
500-600	20	56+x
600-700	y	56+x+y
700-800	9	65+x+y
800-900	7	72+x+y
900-1000	4	76+x+y

రాశుల మొత్తం n=100

కావున , 76+x+y=100

x+y=100-76

x+y=24----------(1)

మధ్యగతము =525, కావున మధ్యగత తరగతి =500 – 600

$l = 500, f = 20, cf = 36 + x, h = 100$

$$\text{మధ్యగతము} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

$$525 = 500 + \left(\frac{50 - [36 + x]}{20}\right) \times 100$$

$525 = 500 + (50 - 36 - x) \times 5$

$525 - 500 = (14 - x) \times 5$

$\frac{25}{5} = 14 - x$

$\Rightarrow 5 = 14 - x$

$\Rightarrow x = 14 - 5$

$\Rightarrow x = 9$

(1)నుండి : $9 + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 9 \Rightarrow y = 15$

వివిధ కేంద్రీయస్థాన విలువలు – ప్రత్యేక సందర్భములు

1. అంకమధ్యమము దత్తాంశములోని అన్నీ రాశుల విలువలను (అత్యల్ప ,అత్యధిక విలువలు కూడా) పరిగణనలోనికి తీసుకొంటుంది . కనుక అంకమధ్యమము అత్యంత విశ్వసనీయ మైన కేంద్రీయస్థాన విలువ అంటాం .
2. దత్తాంశములోని విడి విడి రాశులు , ప్రత్యేకంగా అంత్యమ రాశుల విలువలకు ,ప్రాముఖ్యత లేనప్పుడు మధ్యగతమును అనువైన కేంద్రీయస్థాన విలువగా తీసుకుంటాం .
3. పలుమార్లు పునరావృతమగు , బహు ప్రముఖ్యముగల రాసులను గుర్తించవలసిన సందర్భములలో బాహుళకమును కేంద్రీయస్థాన విలువగా తీసుకుంటాం.

BALABHADRA SURESH

ఉదాహరణ : i) ఎక్కువ మంది వీక్షించే టెలివిజన్ ప్రోగ్రాము కనుగొనుటకు.

ii) ఎక్కువ అమ్మకముగల వస్తువు కనుగొనుటకు .

iii) ఎక్కువ మంది ఉపయోగించు వాహనము రంగు కనుగొనుటకు బాహుళ కం ఉపయోగిస్తారు .

EXERCISE - 14.3

1. క్రింది దత్తాంశమునకు అంకమధ్యమము , మధ్యగతము , బాహుళకములను కనుగొని వానిని పోల్చండి .

నెలవారి వినియోగం(యూ)	65-85	85-105	105-125	125-145	145-165	165-185	185-205
వినియోగదారుల సంఖ్య	4	5	13	20	14	8	4

సాధన :

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం (f_i)	తరగతి మధ్యవిలువ(x_i)	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$	సంచిత పౌనఃపున్యం
65-85	4	75	-3	-12	4
85-105	5	95	-2	-10	9
105-125	13→ f_0	115	-1	-13	22→ cf
125-145	20→ f_1(f)	135→ a	0	0	42
145-165	14→ f_2	155	1	14	56
165-185	8	175	2	16	64
185-205	4	195	3	12	68
	$n = \sum f_i = 68$		$\sum f_i u_i = -35 + 42 = 7$		

సగటు :

$a = 135, \ \sum f_i u_i = 7, \sum f_i = 68, h = 20$

సగటు $(\bar{x}) = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

$= 135 + \left(\frac{7}{68}\right) \times 20$

$= 135 + \frac{7 \times 5}{17}$

$= 135 + \frac{35}{17} = 135 + 2.06 = 137.06$

బాహుళకము :

గరిష్ఠ పౌనఃపున్యం=20. కావున బాహుళక తరగతి =125-145

$l = 125, f_1 = 20, \ f_0 = 13, f_2 = 14, h = 20$

బాహుళకము $= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$= 125 + \left(\frac{20 - 13}{2 \times 20 - 13 - 14}\right) \times 20$

$= 125 + \left(\frac{7 \times 20}{40 - 27}\right)$

$= 125 + \frac{140}{13}$

$= 125 + 10.77 = 135.77$

BALABHADRA SURESH

మధ్యగతము :

n =68, $\frac{n}{2} = \frac{68}{2} = 34$. కావున మధ్యగత తరగతి = 125 – 145.

$l = 125, \quad cf = 22, \quad f = 20, \quad h = 20$

$$\text{మధ్యగతము} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

$$= 125 + \left(\frac{34 - 22}{20}\right) \times 20$$

$$= 125 + 12 = 137$$

మధ్యగతము = 137 units, సగటు = 137.06 units, బాహుళకము = 135.77 units.

2. క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడిన 60 రాశుల మధ్యగతం 28.5, అయిన x , y విలువలు కనుగొనుము .

తరగతిఅంతరం	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
పౌనఃపున్యము	5	x	20	15	y	5

సాధన ::

తగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం	సంచిత పౌనఃపున్యం
0-10	5	5
10-20	X	5+x
20-30	20	25+x
30-40	15	40+x
40-50	Y	40+x+y
50-60	5	45+x+y
	n= 45+x+y	

రాశుల సంఖ్య n=60 . కావున , $45 + x + y = 60$

$x + y = 60 - 45 \Rightarrow x + y = 15$-----(1)

మధ్యగతము =28.5. కావున మధ్యగత తరగతి =20-30

$l = 20, \frac{n}{2} = 30, f = 20, cf = 5 + x, h = 10$

$$\text{మధ్యగతము} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

$$28.5 = 20 + \left(\frac{30 - [5+x]}{20}\right) \times 10$$

$$28.5 = 20 + \left(\frac{30 - 5 - x}{2}\right)$$

$$28.5 - 20 = \frac{25 - x}{2}$$

$$8.5 = \frac{25 - x}{2}$$

$$8.5 \times 2 = 25 - x$$

$$17 = 25 - x$$

$$x = 25 - 17$$

$$\therefore x = 8$$

$$From(1) \;\; x + y = 15$$

$$8 + y = 15$$

$$y = 15 - 8$$

$$y = 7$$

BALABHADRA SURESH

3. కింది విభాజన పట్టిక నుండి పాలసీదారుల మధ్యగతం కనుగొనండి .

వయస్సు (సం॥)	20 కన్నా తక్కువ	25 కన్నా తక్కువ	30కన్నా తక్కువ	35 కన్నా తక్కువ	40కన్నా తక్కువ	45కన్నా తక్కువ	50 కన్నా తక్కువ	55కన్నా తక్కువ	60 కన్నా తక్కువ
పాలసీదారుల సంఖ్య	2	6	24	45	78	89	92	98	100

Sol:

వయస్సు (సం||)	పౌనఃపున్యం (f)	సంచిత పౌనఃపున్యం
Below 20	2	2
20-25	4	6
25-30	18	24
30-35	21	45$\rightarrow cf$
35-40	33$\rightarrow f$	78
40-45	11	89
45-50	3	92
50-55	6	98
55-60	2	100
	$n = \sum f_i = 100$	

n =100, $\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$. కావున మధ్యగత తరగతి = 35-40

$l = 35, \quad cf = 45, \quad f = 33, \quad h = 5$

మధ్యగతము $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

$= 35 + \left(\frac{50 - 45}{33}\right) \times 5$

$= 35 + \frac{5 \times 5}{33}$

$= 35 + \frac{25}{33} = 35 + 0.76 = 35.76$

4. క్రింది పట్టిక నుండి చెట్టు యొక్క ఆకుల పొడవుల మధ్యగతము కనుగొనుము .

ఆకు పొడవు (మి.మి)	118-126	127-135	136-144	145-153	154-162	163-171	172-180
ఆకుల సంఖ్య	3	5	9	12	5	4	2

సాధన :

Length (in mm)	Number of leaves	Cumulative Frequency
118-126	3	3
127-135	5	8
136-144	9	17$\rightarrow cf$
145-153	12$\rightarrow f$	29
154-162	5	34
163-171	4	38
172-180	2	40
	$n = \sum f_i = 40$	

n =40, $\frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20$. కావున మధ్యగత తరగతి =35-40

$l = \frac{144+145}{2} = \frac{289}{2} = 144.5, \quad cf = 17, \; f = 12, \; h = 9$

మధ్యగతము $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

$= 144.5 + \left(\frac{20-17}{12}\right) \times 9$

$= 144.5 + \frac{3 \times 9}{12}$

$= 144.5 + \frac{9}{4} = 144.5 + 2.25 = 146.75.$

చెట్టు యొక్క ఆకుల పొడవుల మధ్యగతము =146.75 mm

5. క్రింది పౌనఃపున్య విభాజనము నుండి బల్బుల జీవితకాలమునకు మధ్యగతము కనుగొనండి .

జీవితకాలం (గంటలలో)	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
బల్బుల సంఖ్య	14	56	60	86	74	62	48

సాధన :

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం	సంచిత పౌనఃపున్యం
1500-2000	14	14
2000-2500	56	70
2500-3000	60	130→ cf
3000-3500	86→ f	216
3500-4000	74	290
4000-4500	62	352
4500-5000	48	400
	$n = \sum f_i = 400$	

n =400 , $\frac{n}{2} = \frac{400}{2} = 200$. కావున మధ్యగత తరగతి =3000-3500

$l = 3000, \quad cf = 130, \; f = 86, \; h = 500$

మధ్యగతం $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

$= 3000 + \left(\frac{200-130}{86}\right) \times 500$

$= 3000 + \frac{70 \times 250}{43}$

$= 3000 + \frac{17500}{43} = 3000 + 406.98 = 3406.98$

బల్బుల జీవితకాలమునకు మధ్యగతము =3406.98 గంటలు .

6. క్రింది పౌనఃపున్య విభాజనము నుండి ఇంటిపేర్లలోని అక్షరాల సంఖ్యకు అంకమధ్యమము , మధ్యగతము , బాహుళకము కనుగొనండి.

అక్షరాల సంఖ్య	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
ఇంటిపేర్ల సంఖ్య	6	30	40	16	4	4

BALABHADRA SURESH

Sol:

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం	తరగతి మధ్యవిలువ (x_i)	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$	సంచిత పౌనఃపున్యం
1-4	6	2.5	-2	-12	6
4-7	30→ f_0	5.5	-1	-30	36→ cf
7-10	40→ f_1(f)	8.5→ a	0	0	76
10-13	16→ f_2	11.5	1	16	92
13-16	4	14.5	2	8	96
16-19	4	17.5	3	12	100
	$n = \sum f_i = 100$		$\sum f_i u_i = -42 + 36 = -6$		

మధ్యగతము:

n =100, $\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$. కావున మధ్యగత తరగతి =7-10.

$l = 7, \quad cf = 36, \quad f = 40, \quad h = 3$

$$\text{మధ్యగతము} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

$$= 7 + \left(\frac{50 - 36}{40}\right) \times 3$$

$$= 7 + \frac{14 \times 3}{40}$$

$$= 7 + \frac{21}{20} = 7 + 1.05 = 8.05$$

అంకగణిత మధ్యమం :

$a = 8.5, \ \sum f_i u_i = -6, \sum f_i = 100, h = 3$

$$\text{అంకగణిత మధ్యమం}(\bar{x}) = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$$

$$= 8.5 + \left(\frac{-6}{100}\right) \times 3$$

$$= 8.5 - \frac{18}{100} = 8.5 - 0.18 = 8.32.$$

బాహుళకము :

గరిష్ఠ పౌనఃపున్యం =40. కావున బాహుళక తరగతి == 7-10

$l = 7, f_1 = 40, \ f_0 = 30, f_2 = 16, h = 3$

$$\text{బాహుళకము} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 7 + \left(\frac{40 - 30}{2 \times 40 - 30 - 16}\right) \times 3$$

$$= 7 + \frac{10 \times 3}{80 - 46}$$

$$= 7 + \frac{30}{34} = 7 + \frac{15}{17} = 7 + 0.88 = 7.88$$

మధ్యగతము $= 8.05$, అంకగణిత మధ్యమం $= 8.32$, బాహుళకము $= 7.88$

7. క్రింది విభాజన పట్టికలో 30 మంది విద్యార్థుల బరువులు ఇవ్వబడ్డాయి . వారి బరువుల మధ్యగతము కనుగొనండి

భారము(కి.గ్రా)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	3	8	6	6	3	2

BALABHADRA SURESH

సాధన ::

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం	సంచిత పౌనఃపున్యం
40-45	2	2
45-50	3	5
50-55	8	13→ cf
55-60	6→ f	19
60-65	6	25
65-70	3	28
70-75	2	30
	$n = \sum f_i = 30$	

n =30, $\frac{n}{2} = \frac{30}{2} = 15$. కావున మధ్యగత తరగతి = 55-60.

$l = 55, \quad cf = 13, \ f = 6, \ h = 5$

మధ్యగతము $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

$$= 55 + \left(\frac{15 - 13}{6}\right) \times 5$$

$$= 55 + \frac{2 \times 5}{6} = 55 + \frac{5}{3} = 55 + 1.67 = 56.67$$

బరువుల మధ్యగతము =56.67 kg.

సంచిత పౌనఃపున్యముల రేఖాచిత్రములు

1. ఓజీవ్ వక్రాలు గీయుటలో X-అక్షము పై హద్దులను , Y-అక్షముపై సంచిత పౌనఃపున్యములను తీసుకోవలెను .
2. ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము :

   తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దులను x –నిరూపకం గాను ,దానికి సంబంధించిన ఆరోహణ సంచితపౌనఃపున్యములను y- నిరూపకం గాను తీసుకొని ఆ బిందువులను గ్రాఫు తలంపై గుర్తించి వాటిని సరళ వక్రం తో కలుపగా వచ్చేది ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము లేదా ఓజీవ్ వక్రము .
3. అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము :

   తరగతి యొక్క దిగువ హద్దులను x –నిరూపకం గాను ,దానికి సంబంధించిన అవరోహణ సంచితపౌనఃపున్యములను y- నిరూపకం గాను తీసుకొని ఆ బిందువులను గ్రాఫు తలంపై గుర్తించి వాటిని సరళ వక్రం తో కలుపగా వచ్చేది అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము లేదా ఓజీవ్ వక్రము.
4. ఒకే దత్తాంశం యొక్క రెండు ఓజీవ్ వక్రాలు పరస్పరం ఖండించుకొన్న బిందువు నుండి X –అక్షం మీదికి గీచిన లంబపాదము ఆ దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతమును తెలుపుతుంది .

BALABHADRA SURESH

ఉదాహరణ -9. సంగారెడ్డి ప్రాంతములోని 30 అంగళ్ళ యొక్క సంవత్సర ఆదాయములు క్రింది పట్టిక రూపంలో ఇవ్వబడ్డాయి.

లాభము(లక్ష `)	అంగళ్ళ సంఖ్య
5 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	30
10 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	28
15 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	16
20 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	14
25 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	10
30 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	7
35 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	3

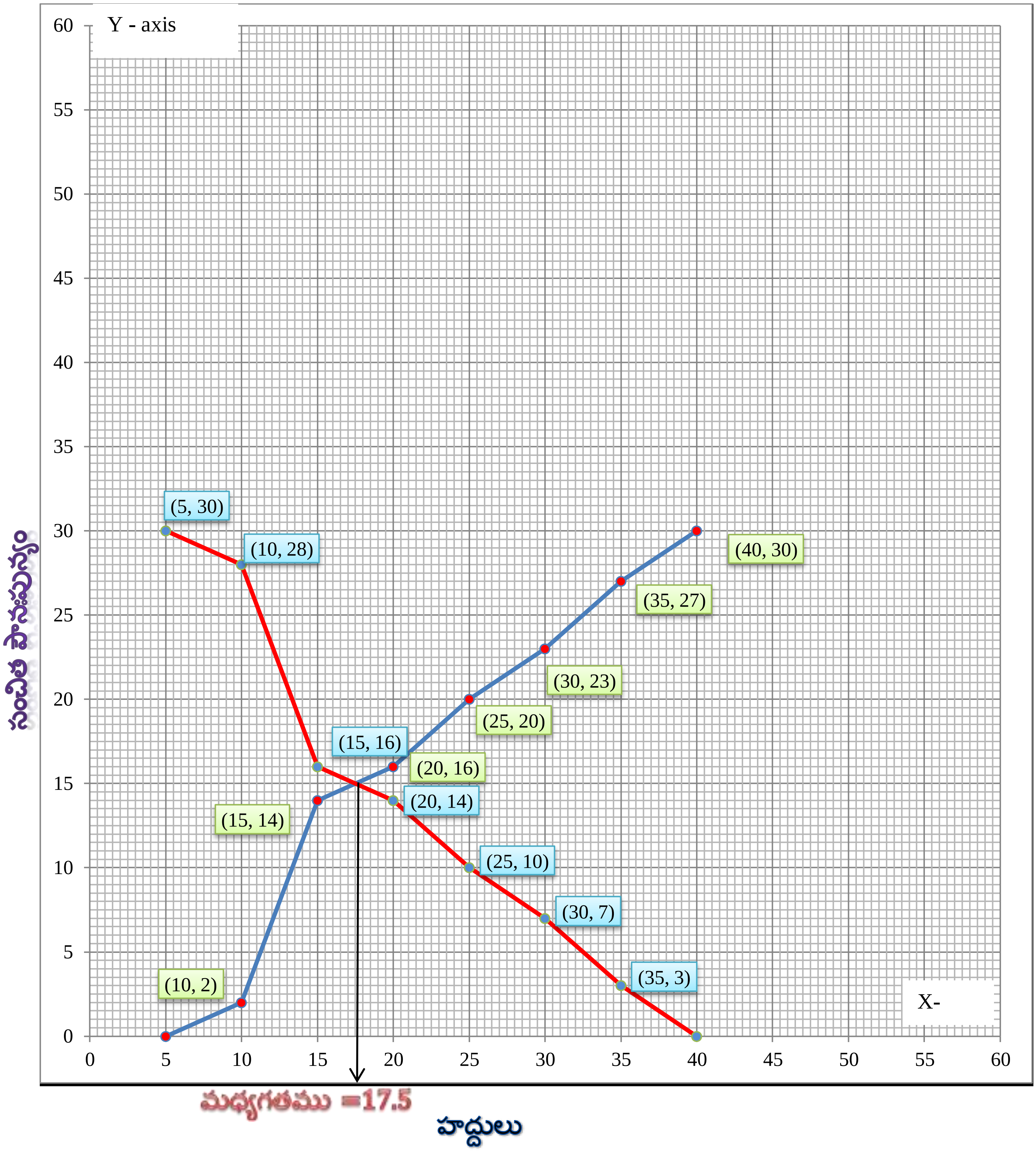
పై దత్తాంశమునకు రెండు ఓజీవ్ వక్రాలు గీయండి. అందు నుండి లాభముల యొక్క మధ్యగతము కనుగొనండి.

.

సాధన :

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం	ఎగువ హద్దు	ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం	బిందువులు	దిగువ హద్దు	అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం	బిందువులు
5-10	2	10	2 ↓	(10,2)	5	30	(5,30)
10-15	12	15	14	(15,14)	10	28	(10,28)
15-20	2	20	16	(20,16)	15	16	(15,16)
20-25	4	25	20	(25,20)	20	14	(20,14)
25-30	3	30	23	(30,23)	25	10	(25,10)
30-35	4	35	27	(35,27)	30	7	(30,7)
35-40	3	40	30	(40,30)	35	3 ↑	(35,3)

BALABHADRA SURESH



అభ్యాసము - 14.4

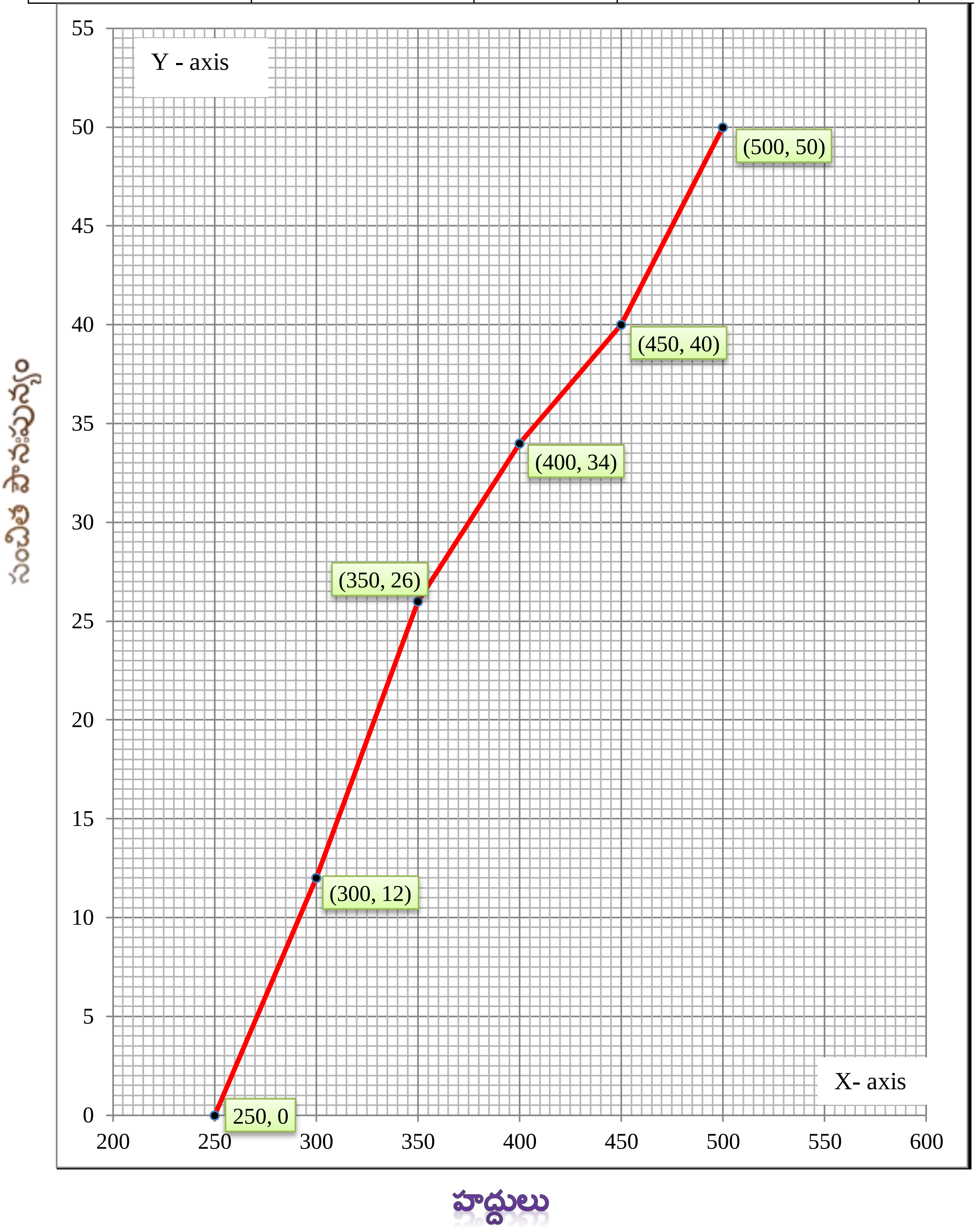
1. 50 మంది శ్రామికుల దినసరి భత్యములు క్రింది పౌనఃపున్య విభాజనములో ఇవ్వబడ్డాయి.

దినసరి(` లలో)	250-300	300-350	350-400	400-450	450-500
శ్రామికుల సంఖ్య	12	14	8	6	10

ఈ దత్తాంశమునకు ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను తయారు చేసి, ఓజీవ్ వక్రము గీయండి.

సాధన :

దినసరి (in Rupees)	శ్రామికుల సంఖ్య	ఎగువ హద్దు	ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం	బిందువులు
250-300	12	300	12	(300,12)
300-350	14	350	26	(350,26)
350-400	8	400	34	(400,34)
400-450	6	450	40	(450,40)
450-500	10	500	50	(500,50)



2. ఒక పాఠశాలలో జరిగిన వైద్య పరీక్షలలో తరగతిలోని 35 మంది విద్యార్థుల బరువులు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి.

బరువు (కి.గ్రా)	విద్యార్థుల సంఖ్య
38 కన్నా తక్కువ	0
40 కన్నా తక్కువ	3
42 కన్నా తక్కువ	5
44 కన్నా తక్కువ	9
46 కన్నా తక్కువ	14
48 కన్నా తక్కువ	28
50 కన్నా తక్కువ	32
52 కన్నా తక్కువ	35

ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము గీచి దాని నుండి మధ్యగతమును గుర్తించండి. ఈ దత్తాంశమునకు సూత్ర సహాయంతో మధ్యగతము కనుగొని రెండు విలువలు సరిచూడండి.

సాధన :

బరువు (in kg)	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం (y)	ఎగువ హద్దు (x)	బిందువు (x,y)
0-38	0	0	38	(38,0)
38-40	3	3	40	(40,3)
40-42	2	5	42	(42,5)
42-44	4	9	44	(44,9)
44-46	5	14→ cf	46	(46,14)
46-48	14→ f	28	48	(48,28)
48-50	4	32	50	(50,32)
50-52	3	35	52	(52,35)

$$\frac{n}{2} = \frac{35}{2} = 17.5$$

కావున Y-నిరూపకం =17.5. రేఖాచిత్రం నుండి దీని X- *నిరూపకం* = 46.5.

∴ మధ్యగతము =46.5

మధ్యగతము (సూత్రమునుపయోగించి):

$\frac{n}{2} = \frac{35}{2} = 17.5.$ కావున మధ్యగత తరగతి =46-48.

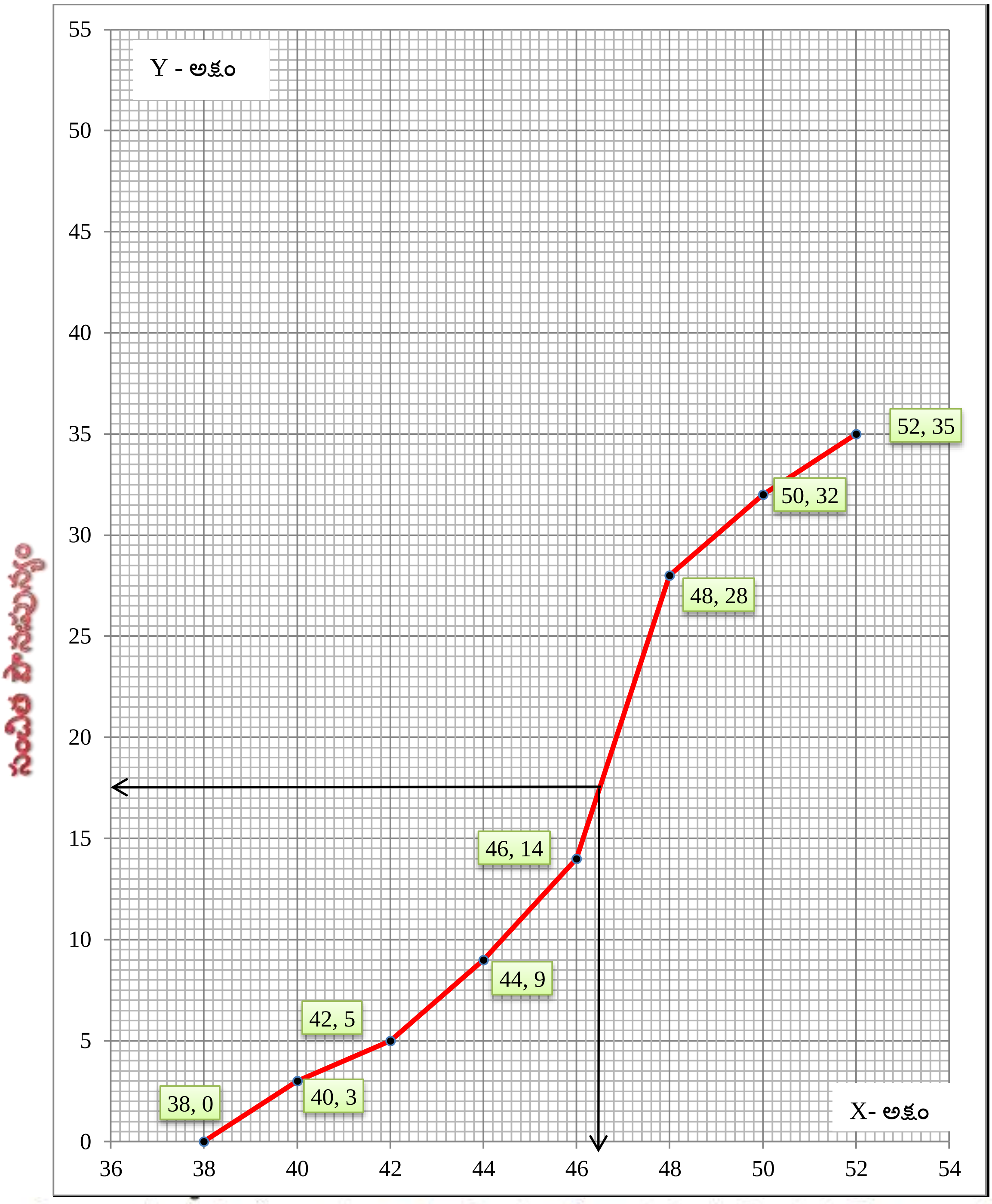
$l = 46, \quad cf = 14, \; f = 14, \; h = 2$

$$\text{మధ్యగతము} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

$$= 46 + \left(\frac{17.5 - 14}{14}\right) \times 2$$

$$= 46 + \frac{3.5}{7} = 46 + 0.5 = 46.5$$

BALABHADRA SURESH



3. ఒక గ్రామములోని 100 మంది రైతులు పొలములలో హెక్టారుకు దిగుబడి ధాన్యము క్రింది విభాజనము నందు ఇవ్వబడింది.

ధాన్యం దిగుబడి (క్వింటాల్/టాక్టర్)	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
రైతుల సంఖ్య	2	8	12	24	38	16

ఈ దత్తాంశమునకు అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము తయారు చేసి ఓజీవ్ వక్రము గీయండి.

sol:

ధాన్యం దిగుబడి (Qui/Hec)	రైతుల సంఖ్య (f)	దిగువ హద్దు(x)	అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం (y)	బిందువులు (x,y)
50-55	2	50	100	(50,100)
55-60	8	55	98	(55,98)
60-65	12	60	90	(60,90)
65-70	24	65	78	(65,78)
70-75	38	70	54	(70,54)

75-80	16	75	16	(75,16)

THANK YOU

BALABHADRA SURESH