అధ్యాయము 11

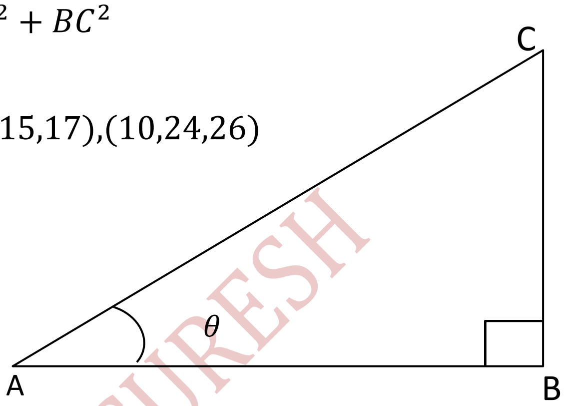


# త్రికోణమితి (నోట్స్)

1. Father of trigonometry (త్రికోణమితి పిత ) Hipparchus.
2. In India, the father of trigonometry (భారతదేశ త్రికోణమితి పిత ) **Aryabhata .(ఆర్యభట్ట )**
3. బౌద్ధాయన సిద్ధాంతం (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం)

   ఒక లంబకోణ త్రిభుజం లో కర్ణము మీద వర్గము, మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానం
4. $\Delta ABC$ లో $\angle B = 90^0$ అయితే $AC^2 = AB^2 + BC^2$
5. కొన్ని పైథాగోరియన్ త్రికములు

   (3,4,5),(5,12,13),(6,8,10),(7,24,25),(8,15,17),(10,24,26)
   (20,21,29)




**లంబకోణ త్రిభుజంలోని భుజాలు :**

AC = కర్ణం

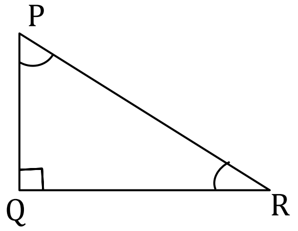
BC = ∠A ($\theta$) యొక్క ఎదుటి భుజము .

AB = ∠A ($\theta$) యొక్క ఆసన్న భుజము

**ఇది చేయండి**

క్రింద ఇచ్చిన త్రిభుజాలలో ఇచ్చిన కోణాల ఆధారంగా “కర్ణం”, “ఎదుటిభుజము” మరియు “ఆసన్న భుజము” లను గుర్తించి రాయండి .

1. కోణం R పరంగా

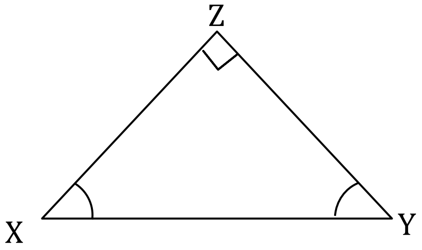



సాధన : కర్ణం =PR

∠R యొక్క ఎదుటి భుజము .=PQ

∠R యొక్క ఆసన్న భుజము =RQ

2. (i) కోణం X పరంగా




Sol: కర్ణం =XY

∠X యొక్క ఎదుటి భుజము =ZY

∠X యొక్క ఆసన్న భుజము =XZ

(ii) కోణం Y పరంగా

Sol: కర్ణం =XY

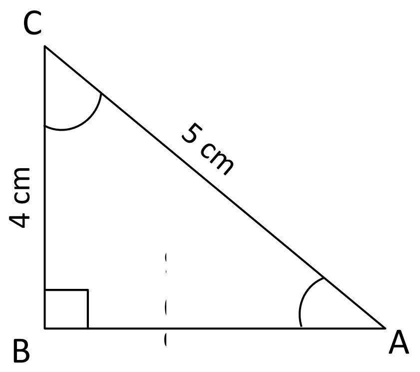
∠Y యొక్క ఎదుటి భుజము =ZX

∠Y యొక్క ఆసన్న భుజము =YZ

**TRY THIS**

BALABHADRA SURESH

ప్రక్క త్రిభుజం లో ఇచ్చిన కోణాల పరంగా “కర్ణం”, “ఎదుటిభుజము” మరియు “ఆసన్న భుజము” లను కనుగొనండి .




సాధన:: $In\ \Delta ABC\ , \angle B = 90^0$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి )

$AB^2 + 4^2 = 5^2$

$AB^2 + 16 = 25$

$AB^2 + 16 = 25 \Rightarrow AB^2 = 25 - 16$

$AB^2 = 9 = 3^2$

AB=3 cm

కోణం C పరంగా

కర్ణం =AC=5 cm

∠C యొక్క ఎదుటి భుజము =AB=3 cm

∠C యొక్క ఆసన్న భుజము =BC=4 cm.

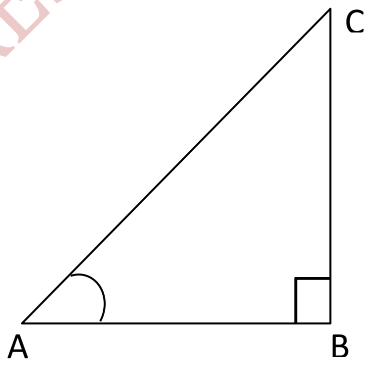
కోణం A పరంగా

కర్ణం =AC=5 cm

∠A యొక్క ఎదుటి భుజము =BC=4 cm

∠A యొక్క ఆసన్న భుజము =AB=3 cm.

## త్రికోణ మితీయ నిష్పత్తులు




(i) $SinA = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము పొడవు}}{\text{కర్ణంపొడవు}} = \frac{BC}{AC}$

(ii) $\cos A = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము పొడవు}}{\text{కర్ణం పొడవు}} = \frac{AB}{AC}$

(iii) $\tan A = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము పొడవు}}{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము పొడవు}} = \frac{BC}{AB}$

(iv) $cosec\ A = \frac{\text{కర్ణం పొడవు}}{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము పొడవు}} = \frac{AC}{BC}$

(v) $sec\ A = \frac{\text{కర్ణం పొడవు}}{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము పొడవు}} = \frac{AC}{AB}$

(vi) $\cot A = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము పొడవు}}{(\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము పొడవు}} = \frac{AB}{BC}$

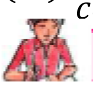
## త్రికోణమితి నిష్పత్తుల మధ్య సంబంధం :

$(i)\ SinA = \frac{1}{cosec\ A}$ , $cosec\ A = \frac{1}{SinA}$ , $SinA \times cosec\ A = 1$

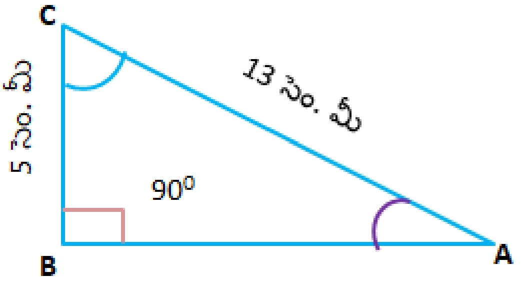
$(ii)\ \cos A = \frac{1}{\sec A}$ , $\sec A = \frac{1}{\cos A}$ , $\cos A \times \sec A = 1$

$(iii)\ \tan A = \frac{1}{\cot A}$ , $\cot A = \frac{1}{\tan A}$ , $\tan A \times \cot A = 1$

$(iv)\ \frac{SinA}{\cos A} = \tan A,\quad \frac{\cos A}{SinA} = \cot A$



**ఇవి చేయండి**




1. **పక్కనున్న లంబకోణత్రిభుజంలో (i) sin C (ii) cos C and (iii) tan C లను కనుగొనుము .**

సాధన :: $\Delta ABC$ లో $\angle B = 90^0$

(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

BALABHADRA SURESH

$AB^2 + 5^2 = 13^2$

$AB^2 + 25 = 169$

$AB^2 = 169 - 25$

$AB^2 = 144 \Rightarrow AB = \sqrt{144} \Rightarrow AB = 12\ cm$

$(i)\ sin\ C = \dfrac{\angle C \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణం}} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{12}{13}$

$\therefore \sin C = \frac{12}{13}$

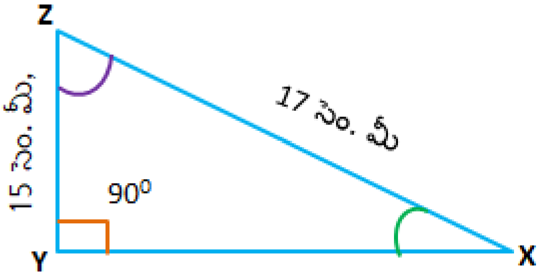
$(ii)\ cos\ C = \dfrac{\angle C \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణం}} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{5}{13}$

$\therefore \cos C = \frac{5}{13}$

$(iii)\ tan\ C = \dfrac{\angle C \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}{\angle C \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము}} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{12}{5}$

$\therefore \tan C = \frac{12}{5}$

2. **ఒక త్రిభుజం XYZ లో, ∠Y లంబకోణము మరియు XZ = 17cm and YZ = 15 cm అయితే (i) sin X (ii) cos Z (iii) tan X లను కనుగొనుము .**




సాధన : In $\Delta XYZ$ , $\angle Y = 90^0$

$XY^2 + YZ^2 = XZ^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

$XY^2 + 15^2 = 17^2$

$XY^2 + 225 = 289$

$XY^2 = 289 - 225$

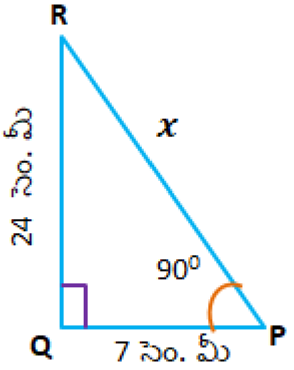
$XY^2 = 64 \Rightarrow XY = \sqrt{64} \Rightarrow XY = 8\ cm$

$(i)\ sin\ X = \dfrac{\angle X \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణం}} = \dfrac{YZ}{XZ} = \dfrac{15}{17}$

$(ii)\ cos\ Z = \dfrac{\angle Z \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణం}} = \dfrac{YZ}{XZ} = \dfrac{15}{17}$

$(iii)\ tan\ X = \dfrac{\angle X \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}{\angle X \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము}} = \dfrac{YZ}{XY} = \dfrac{17}{8}$

3. **త్రిభుజం PQR లో Q లంబకోణము మరియు ∠ P విలువ x మరియు PQ = 7 సెం. మీ. మరియు QR = 24 సెం. మీ. అయిన sin x మరియు cos x ల విలువలు కనుగొనుము .**




సాధన : $\Delta PQR$ లో $\angle Q = 90^0$

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

$PR^2 = 7^2 + 24^2$

BALABHADRA SURESH

$PR^2 = 49 + 576$

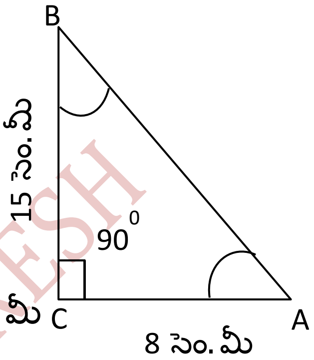
$PR^2 = 625 \Rightarrow PR = \sqrt{625} \Rightarrow PR = 25$ సెం. మీ

$\sin x = \dfrac{\angle x \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణం}} = \dfrac{RQ}{PR} = \dfrac{24}{25}$

$\cos x = \dfrac{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణం}} = \dfrac{PQ}{PR} = \dfrac{7}{25}$

## ప్రయత్నించండి

**ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ABCలో C లంబకోణము . BC + CA = 23 సెం. మీ మరియు BC – CA = 7 సెం. మీ, అయిన sin A మరియు tan B లను కనుగొనుము.**




సాధన : BC + CA = 23 సెం. మీ ------(1)

BC – CA = 7 సెం. మీ ---------(2)

(1)+(2)⇒ 2 BC=23+7=30 సెం. మీ

$BC = \frac{30}{2} = 15$సెం. మీ

(1)⇒ $15 + CA = 23 \Rightarrow CA = 23 - 15 \Rightarrow CA = 8$ సెం. మీ

$\Delta ABC$ లో $\angle C = 90^0$

$AB^2 = AC^2 + BC^2$(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

$AB^2 = 8^2 + 15^2$

$AB^2 = 64 + 225 = 289$

$AB = \sqrt{289} = 17$ సెం. మీ

$\sin A = \dfrac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణం}} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{15}{17}$

$\tan B = \dfrac{\angle B \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}{\angle B \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము}} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{8}{15}$

## ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

**(i) ఏదో ఒక విలువ $x$ కు $\sin x = \frac{4}{3}$ సాధ్యమా ? ఎందుకు ?**

సాధన : లంబకోణ త్రిభుజంలో ప్రతీ భుజము కర్ణము కంటే చిన్నది

$\Rightarrow \dfrac{\text{భుజము}}{\text{కర్ణం}} < 1$

ఇచ్చినది $\sin x = \frac{4}{3} > 1$ .అందువల్ల $\sin x = \frac{4}{3}$ సాధ్యము కాదు .

**(ii) sin A మరియు cos A ల విలువలు ఎల్లప్పుడూ 1కంటే తక్కువగా ఉంటాయి . ఎందుకు ?**

సాధన : లంబకోణ త్రిభుజంలో ప్రతీ భుజము కర్ణము కంటే చిన్నది.

$\Rightarrow \dfrac{\text{భుజము}}{\text{కర్ణం}} < 1$

అందువల్ల sin A మరియు cos A ల విలువలు ఎల్లప్పుడూ 1కంటే తక్కువగా ఉంటాయి .

**(iii) tan A అంటే tan మరియు A ల లబ్ధము .**

BALABHADRA SURESH

సాధన : అసత్యము . tan A అనగా కోణం A యొక్క tangent విలువ .

ప్రయత్నించండి

1. $\frac{\sin A}{\cos A}$ విలువ $\tan A$ అవుతుందా ?

సాధన: అవుతుంది

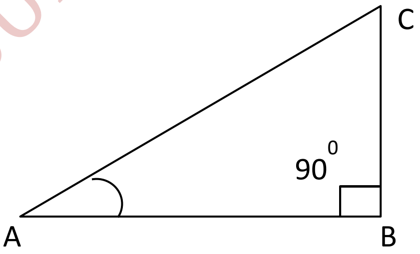
$$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\frac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణం}}}{\frac{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణం}}}=\frac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము}}=\tan A$$

2. $\frac{\cos A}{\sin A}$ విలువ $\cot A$ అవుతుందా ?

సాధన: అవుతుంది

$$\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\frac{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణం}}}{\frac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణం}}}=\frac{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము}}{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}=\cot A$$

**ఉదాహరణ -1: tan A $=\frac{3}{4}$, అయిన కోణం A యొక్క మిగతా త్రికోనమితీయ నిష్పత్తులను కనుక్కోండి .**




సాధన : $\tan A=\frac{3}{4}=\frac{BC}{AB}$

BC=3, AB=4

$\Delta ABC$ లో $\angle B=90^0$

$AC^2=AB^2+BC^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

$AC^2=4^2+3^2$

$AC^2=16+9$

$AC^2=25 \Rightarrow AC=\sqrt{25} \Rightarrow AC=5$

$Sin\ A=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{5}$

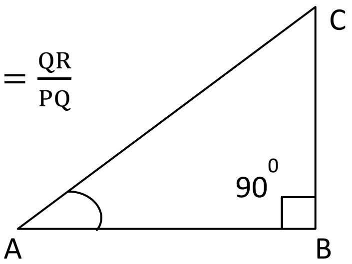
$\cos A=\frac{AB}{AC}=\frac{4}{5}$

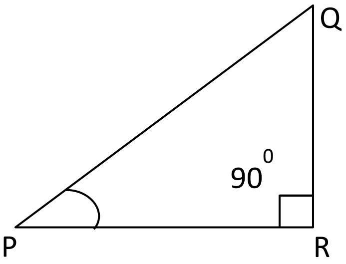
$cosec\ A=\frac{AC}{BC}=\frac{5}{3}$

$Sec\ A=\frac{AC}{AB}=\frac{5}{4}$

$\cot A=\frac{AB}{BC}=\frac{4}{3}$

**ఉదాహరణ -2: sin A = sin P అయ్యేటట్లు ∠A మరియు ∠P లు లఘుకోణాలు అయిన ∠A =∠P అని చూపుము.**




సాధన : $\sin A=\frac{BC}{AC}$ మరియు $\sin P=\frac{QR}{PQ}$

లెక్క ప్రకారం sin A = sin P

$\frac{BC}{AC}=\frac{QR}{PQ}=k$ (అనుకొనుము )

$BC=k.AC$ మరియు $QR=k.PQ$

BALABHADRA SURESH

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$$\frac{AB}{PR}=\frac{\sqrt{AC^2-BC^2}}{\sqrt{PQ^2-QR^2}}=\frac{\sqrt{AC^2-k^2AC^2}}{\sqrt{PQ^2-k^2PQ^2}}=\frac{\sqrt{AC^2(1-k^2)}}{\sqrt{PQ^2(1-k^2)}}=\frac{AC}{PQ}$$

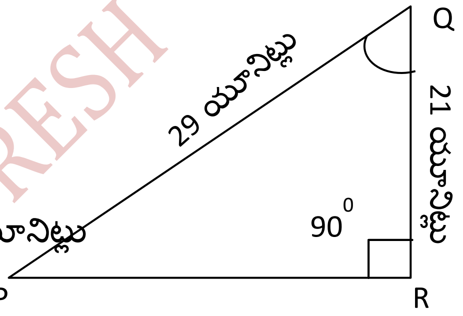
కావున $\frac{AC}{PQ}=\frac{AB}{PR}=\frac{BC}{QR}$

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (భు . భు . భు. సరూపత నియమం )

$\therefore \angle A = \angle P$ (సరూప త్రిభుజాల అనూరుపకోణాలు సమానం )

ఉదాహరణ -3: P వద్ద లంబకోణం కల్గిన లంబకోణ త్రిభుజం PQR లో $PQ = 29$ యూనిట్లు , $QR = 21$ యూనిట్లు మరియు $\angle PQR =$ అయిన (i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ మరియు (ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ విలువలను కనుగొనుము .

సాధన :$\Delta PQR$ లో $\angle R = 90^0$




$PR^2 + QR^2 = PQ^2$(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

$PR^2 = PQ^2 - QR^2$

$PR^2 = 29^2 - 21^2$

$PR^2 = 841 - 441 = 400 \Rightarrow PR = \sqrt{400} \Rightarrow PR = 20$యూనిట్లు

$\sin\theta = \frac{PR}{PQ} = \frac{20}{29}$

$\cos\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{21}{29}$

$$(i)\ \ cos^2\theta + sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 + \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{441}{841} + \frac{400}{841} = \frac{441+400}{841} = \frac{841}{841} = 1$$

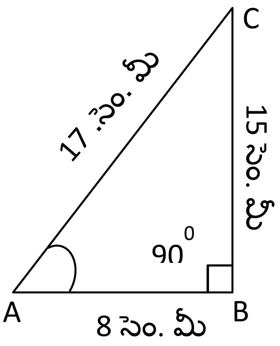
$$(ii)\ \ cos^2\theta - sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{441}{841} - \frac{400}{841} = \frac{441-400}{841} = \frac{41}{841}$$

## అభ్యాసం - 11.1

**1. ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో భుజాలు AB, BC మరియు CA ల పొడవులు వరుసగా 8 సెం. మీ, 15 సెం. మీ మరియు 17 సెం. మీ అయిన sin A, cos A మరియు tan A ల విలువలు కనుగొనుము .**

సాధన : AB=8 సెం. మీ, BC=15 సెం. మీ CA=17 సెం. మీ

ఇక్కడ CA కర్ణము అవుతుంది కావున $\angle B = 90^0$




$sin\ A = \frac{BC}{AC} = \frac{15}{17}$

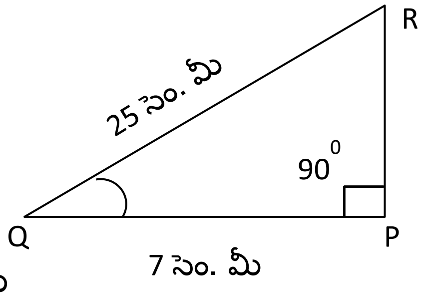
$cos\ A = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{17}$

$tan\ A = \frac{BC}{AB} = \frac{15}{8}$

BALABHADRA SURESH

2. **లంబకోణ త్రిభుజం PQR యొక్క భుజాలు PQ = 7 సెం. మీ, QR = 25 సెం. మీ మరియు $\angle P = 90^0$ అయిన tan Q − tan R కనుగొనుము .**

సాధన : $\Delta PQR$ లో $\angle P = 90^0$




$PR^2 + PQ^2 = RQ^2$(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

$PR^2 = RQ^2 - PQ^2$

$PR^2 = 25^2 - 7^2$

$PR^2 = 625 - 49 = 576 \Rightarrow PR = \sqrt{576} \Rightarrow PR = 24$ సెం. మీ

$\tan Q = \frac{PR}{PQ} = \frac{24}{7}$

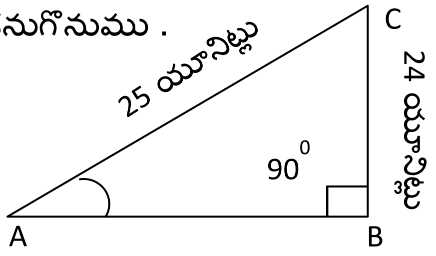
$\tan R = \frac{PQ}{PR} = \frac{7}{24}$

$\tan Q - \tan R = \frac{24}{7} - \frac{7}{24} = \frac{24 \times 24 - 7 \times 7}{7 \times 24} = \frac{576 - 49}{168} = \frac{527}{168}$

3. **B వద్ద లంబకోణం కల్గిన లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో a = 24 యూనిట్లు , b = 25 యూనిట్లు మరియు**

$\angle BAC = \theta$. అయిన cos θ మరియు tan θ ల విలువలు కనుగొనుము .

సాధన : a=BC = 24 యూనిట్లు, b =AC= 25 యూనిట్లు




$\Delta ABC$ లో $\angle B = 90^0$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

$AB^2 = AC^2 - BC^2$

$AB^2 = 25^2 - 24^2$

$AB^2 = 625 - 576 = 49 \Rightarrow AB = \sqrt{49} \Rightarrow AB = 7$ యూనిట్లు

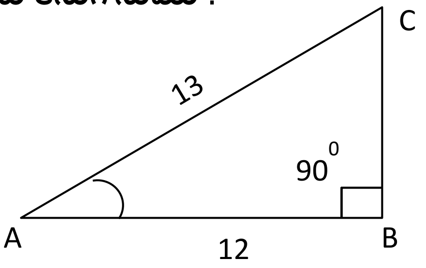
$\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{7}{25}$

$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{24}{7}$

4 **$\cos A = \frac{12}{13}$ అయిన sin A మరియు tan A ల విలువలను కనుగొనుము .**

సాధన : $\cos A = \frac{12}{13} = \frac{AB}{AC}$

AB=12, AC=13




$\Delta ABC$ లో $\angle B = 90^0$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

BALABHADRA SURESH

$BC^2 = AC^2 - AB^2$

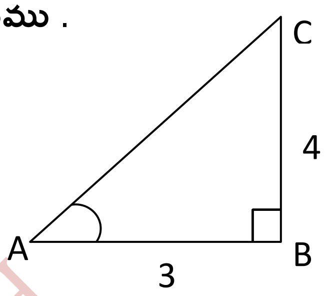
$BC^2 = 13^2 - 12^2$

$BC^2 = 169 - 144 = 25 \Rightarrow BC = \sqrt{25} \Rightarrow BC = 5$ యూనిట్లు

$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{13}$

$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{12}$

**5. 3. tan A=4అయిన sin A మరియు cos A ల విలువలను కనుగొనుము .**




సాధన : $tan\,A = \frac{4}{3} = \frac{BC}{AB}$

Let $BC = 4$ , $AB = 3$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ ( పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి )

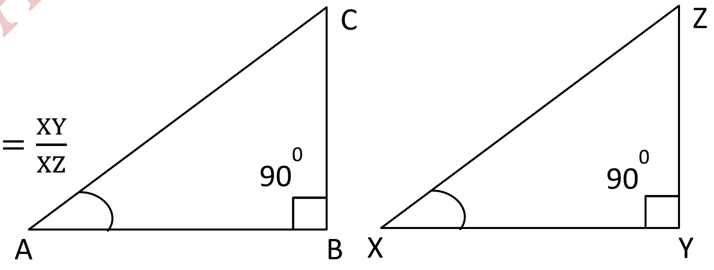
$AC^2 = (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25$

$AC = \sqrt{25} = 5$

$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{5}$

$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$

**6. ΔABC , ΔXYZ లలో cos A = cos X అయ్యేటట్లు ∠A మరియు ∠X లు లఘుకోణాలైన ∠A = ∠X అని చూపుము .**




సాధన : $\cos A = \frac{AB}{AC}$ మరియు $\cos X = \frac{XY}{XZ}$

లెక్కప్రకారం $\cos A = \cos X$

$\frac{AB}{AC} = \frac{XY}{XZ} = k$ (k ఒక స్థిర సంఖ్య )

$AB = k.AC$ మరియు $XY = k.XZ$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి

$$\frac{BC}{YZ} = \frac{\sqrt{AC^2 - AB^2}}{\sqrt{XZ^2 - XY^2}} = \frac{\sqrt{AC^2 - k^2AC^2}}{\sqrt{XZ^2 - k^2XZ^2}} = \frac{\sqrt{AC^2(1-k^2)}}{\sqrt{XZ^2(1-k^2)}} = \frac{AC}{XZ}$$

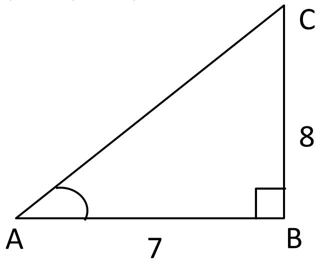
కావున , $\frac{AC}{XZ} = \frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ}$

$\Delta ABC \sim \Delta XYZ$ (భు. భు. భు. సరూపత)

∴, ∠A = ∠X (సరూప త్రిభుజాల అనురూప కోణాలు సమానం)

BALABHADRA SURESH

**7.** $\boldsymbol{cot\ \theta = \frac{7}{8}}$ **అయిన** $\boldsymbol{(i)\ \frac{(1+sin\,\theta)(1-sin\,\theta)}{(1+cos\,\theta)(1-cos\,\theta)}}$ $\boldsymbol{(ii)\ \frac{(1+sin\,\theta)}{cos\,\theta}}$ **లను కనుగొనుము .**




సాధన : $cot\ \theta = \frac{7}{8} = \frac{AB}{BC}$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 7^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113$

$AC = \sqrt{113}$

$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{\sqrt{113}}$ , $\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{7}{\sqrt{113}}$

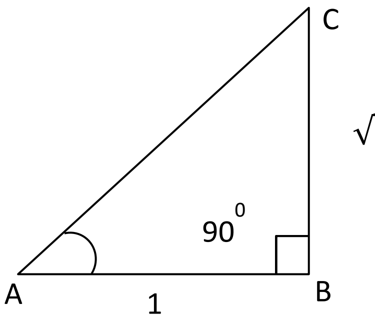
$(i)\ \frac{(1+sin\,\theta)(1-sin\,\theta)}{(1+cos\,\theta)(1-cos\,\theta)}$

$$= \frac{\left(1+\frac{8}{\sqrt{113}}\right)\left(1-\frac{8}{\sqrt{113}}\right)}{\left(1+\frac{7}{\sqrt{113}}\right)\left(1-\frac{7}{\sqrt{113}}\right)} = \frac{(\sqrt{113}+8)(\sqrt{113}-8)}{(\sqrt{113}+7)(\sqrt{113}-7)} = \frac{113-64}{113-49} = \frac{49}{64}$$

$$(ii)\ \frac{1+\sin\theta}{cos\,\theta} = \frac{1+\frac{8}{\sqrt{113}}}{\frac{7}{\sqrt{113}}} = \frac{\sqrt{113}+8}{7}$$

8. **B వద్ద లంబకోణం కల్గిన త్రిభుజం ABC లో tan A = $\sqrt{3}$ అయిన**

**(i) sin A cos C + cos A sin C (ii) cos A cos C – sin A sin C ల విలువలను కనుగొనుము**




సాధన : $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{BC}{AB}$

BC=$\sqrt{3}$ , AB=1

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ ( పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి )

$AC^2 = (1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$

$AC = \sqrt{4} = 2$

$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

$\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

$\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(i) sin A cos C + cos A sin C

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

(ii) cos A cos C – sin A sin C

BALABHADRA SURESH

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

## త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువల పట్టిక :

| | $\angle A$ | $0^o$ | $30^o$ | $45^o$ | $60^o$ | $90^o$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\sqrt{\frac{0}{4}} = 0$ | $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ | $\sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\sqrt{\frac{4}{4}} = 1$ |
| | sin A | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| | cos A | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\frac{\sin A}{\cos A}$ | $\tan A$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | నిర్వచించబడదు |
| $\frac{1}{\tan A}$ | $\cot A$ | నిర్వచించబడదు | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |
| $\frac{1}{\cos A}$ | $\sec A$ | 1 | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{2}$ | 2 | నిర్వచించబడదు |
| $\frac{1}{\sin A}$ | $cosec\ A$ | నిర్వచించబడదు | 2 | $\sqrt{2}$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | 1 |

**ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.**

**కోణం A విలువ $0^o$ నుండి $90^o$ కు పెరుగుతూ పోతుంటే sin A మరియు cos A విలువలు ఎలా మారుతూ ఉంటాయి ?**

**(i) $A \geq B$ అయిన $\sin A \geq \sin B$ అనడం సబబేనా ?**

సాధన : $A \geq B$ అయిన $\sin A \geq \sin B$ అనడం సబబే. కోణం విలువ పెరిగితే దాని sin విలువ కూడా పెరుగుతుంది .

**(ii) $A \geq B$ అయిన $\cos A \geq \cos B$ అనడం సబబేనా ?**

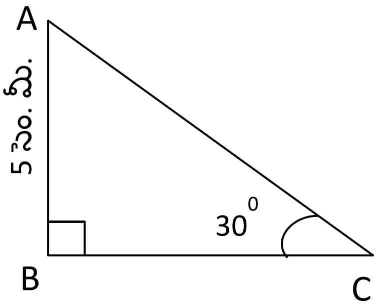
సాధన : కాదు . ఎందువలన అనగా కోణం విలువ పెరిగితే దాని cos విలువ తగ్గుతుంది .

$A \geq B$ అయిన $\cos A \leq \cos B$ అగును

BALABHADRA SURESH

**ఉదాహరణ -4 :** B వద్ద లంబకోణం కల్గిన $\Delta ABC$లో AB = 5 సెం. మీ. మరియు $\angle ACB = 30^0$ అయిన BC మరియు AC భుజాల పొడవులను కనుగొనండి.

సాధన : AB=5 సెం. మీ. మరియు $\angle ACB=30^0$




$\tan 30^0 = \frac{AB}{BC}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{BC}$

$BC = 5\sqrt{3}$ సెం. మీ

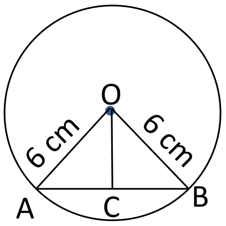
$\sin 30^0 = \frac{AB}{AC}$

$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$

$AC = 5 \times 2 = 10$ సెం. మీ

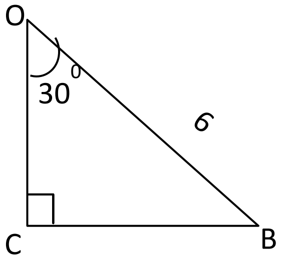
**ఉదాహరణ -5: 6 సెం. మీ. వ్యాసార్ధం కలిగిన వృత్తంలో ఒక జ్యా కేంద్రం వద్ద $60^0$ కోణం చేస్తుంది . ఆ జ్యా పొడవును కనుగొనండి.**

సాధన : వృత్త వ్యాసార్ధము OA=OB=6cm మరియు $\angle AOB = 60^0$




$OC \perp AB$ అయిన $OC$ అనేది $\angle AOB$ కి కోణ సమద్వి ఖండన రేఖ

$\angle AOC = \angle BOC = 30^0$



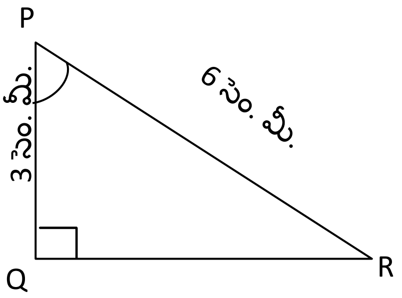

$\Delta COB$ నుండి $sin30^0 = \frac{BC}{OB}$

$\frac{1}{2} = \frac{BC}{6} \Rightarrow BC = \frac{6}{2} = 3cm$

జ్యా పొడవు AB= 2BC= $2 \times 3cm = 6cm$

**ఉదాహరణ -6. Q వద్ద లంబకోణం ఉన్న $\Delta PQR$ లో PQ = 3 సెం. మీ. మరియు PR = 6 సెం. మీ. అయిన $\angle QPR$ మరియు $\angle PRQ$ కనుగొనుము .**

సాధన : PQ = 3 సెం. మీ. మరియు PR = 6 సెం. మీ.




$\cos P = \frac{PQ}{PR} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \cos 60^0$

$\Rightarrow \angle QPR = 60^0$

BALABHADRA SURESH

$$\sin R = \frac{PQ}{PR} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \sin 30^0$$

$\Rightarrow \angle PRQ = 30^0$

**ఉదాహరణ -7.** $\boldsymbol{sin\,(A-B) = \frac{1}{2}, cos\,(A+B) = \frac{1}{2}, 0^0 < A+B \leq 90^0, A > B}$ **అయిన A మరియు B విలువలు కనుక్కోండి .**

సాధన : $sin\,(A-B) = \frac{1}{2} = sin\,30^0$

$\Rightarrow A - B = 30^0$----------(1)

$cos\,(A+B) = \frac{1}{2} = cos\,60^0$

$\Rightarrow A + B = 60^0$----------(2)

(1)+(2)$\Rightarrow A - B + A + B = 30^0 + 60^0$

$\Rightarrow 2A = 90^0 \Rightarrow A = \frac{90^0}{2} = 45^0$

$A = 45^0$ విలువను సమీకరణం (2) లో ప్రతిక్షేపించగా

$45^0 + B = 60^0$

$\Rightarrow B = 60^0 - 45^0 = 15^0$

$\therefore A = 45^0$ మరియు $B = 15^0$

అభ్యాసం - 11.2

**1. క్రింది వాటి విలువలను కనుగొనండి .**

(i) $\mathbf{\sin 45^0 + \cos 45^0}$

సాధన : $\sin 45^0 + \cos 45^0$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(ii) $\dfrac{cos\,45^0}{sec\,30^0 + cosec\,60^0}$

Sol: $\dfrac{cos\,45^0}{sec\,30^0 + cosec\,60^0}$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

(iii) $\dfrac{\mathbf{\sin 30^0 + \tan 45^0 - cosec\,60^0}}{\mathbf{\cot 45^0 + \cos 60^0 - \sec 30^0}}$

సాధన : $\dfrac{sin\,30^0 + tan\,45^0 - cosec\,60^0}{cot\,45^0 + cos\,60^0 - sec\,30^0}$

BALABHADRA SURESH

$$= \frac{\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}} = 1$$

**(iv) 2 tan²45° + cos²30° – sin² 60°.**

సాధన : 2 tan²45° + cos²30° – sin² 60°.

$$= 2 \times (1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2 \times 1 = 2$$

(v) $$\boldsymbol{\frac{sec^2 60^0 - tan^2 60^0}{sin^2 30^0 + cos^2 30^0}}$$

సాధన : $$\frac{sec^2 60^0 - tan^2 60^0}{sin^2 30^0 + cos^2 30^0} = \frac{(2)^2 - (\sqrt{3})^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{4-3}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{4}{4}} = \frac{1}{1} = 1$$

**2. క్రింది వాటి విలువలను కనుగొనండి .**

(i) $$\boldsymbol{\frac{2 \tan 30^0}{1 + tan^2 45^0}}$$

సాధన : $$\frac{2\, tan\, 30^0}{1 + tan^2 45^0} = \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + (1)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{2}{2 \times \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = tan\, 30^0$$

(ii) $$\boldsymbol{\frac{1 - tan^2 45^0}{1 + tan^2 45^0}}$$

సాధన : $$\frac{1 - tan^2 45^0}{1 + tan^2 45^0} = = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

(iii) $$\boldsymbol{\frac{2\, tan\, 30^0}{1 - tan^2 30^0}}$$

సాధన : $$\frac{2\, tan\, 30^0}{1 - tan^2 30^0} = \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{3}$$

**3. sin 60° cos 30° + sin 30° cos 60° విలువ గణించండి sin (60° + 30°) విలువ ఎంత ?**

సాధన : $\sin 60^0 \cos 30^0 + \sin 30^0 \cos 60^0$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$sin(60^0 + 30^0) = \sin 90^0 = 1$

గమనించిన విషయం : $sin(60^0 + 30^0) = sin\, 60^0\, cos\, 30^0 + sin\, 30^0\, cos\, 60^0$

BALABHADRA SURESH

$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

**4. $\cos(60^0 + 30^0) = \cos 60^0 \cos 30^0 - \sin 60^0 \sin 30^0$ అనడం సబబేనా ?**

సాధన : $\cos(60^0 + 30^0) = \cos 90^0 = 0$

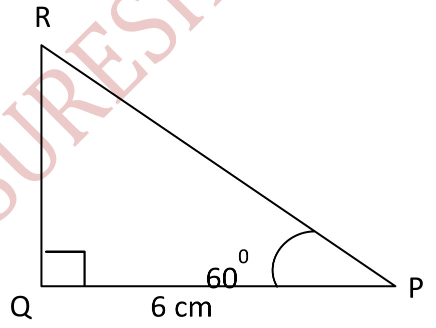
$$\cos 60^0 \cos 30^0 - \sin 60^0 \sin 30^0 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

$\therefore \cos(60^0 + 30^0) = \cos 60^0 \cos 30^0 - \sin 60^0 \sin 30^0$

$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

**5. Q వద్ద లంబకోణం కల్గిన $\Delta PQR$ లో PQ = 6సెం. మీ. $\angle RPQ = 60^0$ అయిన QR మరియు PR విలువలను కనుక్కోండి .**

సాధన : $\Delta PQR$ లో $\angle Q = 90^0$




PQ = 6సెం. మీ. $\angle RPQ = 60^0$

$\cos 60^0 = \frac{PQ}{PR}$

$\frac{1}{2} = \frac{6}{PR}$

$PR = \frac{6 \times 2}{1} = 12$

$\therefore PR = 12$ సెం. మీ

$\tan 60^0 = \frac{QR}{PQ}$

$\sqrt{3} = \frac{QR}{6}$

$QR = 6\sqrt{3}$ సెం . మీ.

**6. Y వద్ద లంబకోణం కల్గిన $\Delta XYZ$ లో YZ = x మరియు XZ = 2x అయిన $\angle YXZ$ మరియు $\angle YZX$ ల విలువలను నిర్ణయించుము.**

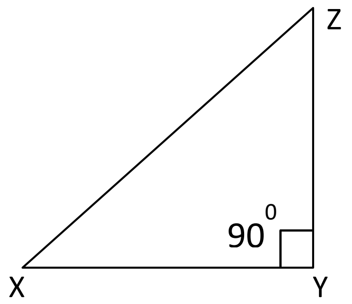
సాధన : $\angle YXZ = \alpha$ మరియు $\angle YZX = \beta$

$\sin \alpha = \frac{YZ}{XZ} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} = \sin 30^0$

$\sin \alpha = \sin 30^0$

$\therefore \alpha = \angle YXZ = 30^0$

$\alpha + 90^0 + \beta = 180^0$ (త్రిభుజం లోని కోణాల మొత్తం )




$30^0 + 90^0 + \beta = 180^0$

$\beta = 180^0 - 120^0 = 60^0$

$\therefore \beta = \angle YZX = 60^0$

BALABHADRA SURESH

7. sin (A + B) = sin A + sin B అనడం సబబేనా ? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించుము .

సాధన : $\sin(A+B) = sin\ A + sin\ B$ అనడం సబబు కాదు

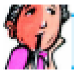
సమర్థించడం :

$A = 30^0$ మరియు $B = 60^0$ తీసుకొనగా

$\sin(A+B) = \sin(30^0 + 60^0) = \sin 90^0 = 1$

$sin\ A + sin\ B = \sin 30^0 + sin\ 60^0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\sin(A+B) \neq sin\ A + sin\ B$



ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

**$\theta$ యొక్క ఏ లఘుకోణ విలువకు $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 4$ సత్యమౌతుంది ?**

**పై సమీకరణం $0^0 \leq \theta \leq 90^0$, లలో ఏ విలువలకు నిర్వచించబడదు ?**

$$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1+sin\ \theta} = 4$$

సాధన : $\frac{cos\ \theta}{1-sin\ \theta} + \frac{cos\ \theta}{1+sin\ \theta} = 4$

$$\frac{\cos\theta(1+sin\ \theta)+cos\ \theta(1-sin\ \theta)}{1-sin^2\theta} = 4$$

$$\frac{\cos\theta(1+\sin\theta+1-\sin\theta)}{cos^2\theta} = 4$$

$$\frac{COS\ \theta \times 2}{cos^2\theta} = 4$$

$$\frac{2}{\cos\theta} = 4$$

$$\cos\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = cos60^0$$

$\therefore\ \theta = 60^0$

$\theta = 90^0$ విలువకు సమీకరణం నిర్వచించబడదు .

ఎందువలన అనగా $\sin 90^0 = 1$ .కావున , $1 - \sin\theta = 1 - sin\ 90^0 = 1 - 1 = 0$

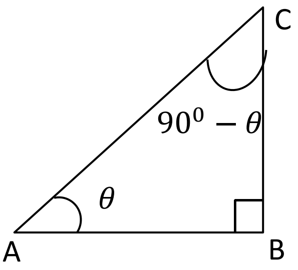
**పూరక కోణాల త్రికోణ మితీయ నిష్పత్తులు :**

రెండు కోణాల మొత్తం $90^0$ అయితే వాటిని పూరక కోణాలు అందురు .

$\theta$ యొక్క పూరక కోణం = $(90^0 - \theta)$

BALABHADRA SURESH

**ఉదాహరణ : sin $(90^0 - \theta)$= cos $\theta$ అని చూపుము ($\theta$ అల్ప కోణం )**




సాధన : $\Delta ABC$ లో $\angle B = 90^0$ మరియు $\angle A = \theta$

అపుడు $\angle C = 90^0 - \theta$

$$sin\ (90^0 - \theta) = \frac{AB}{AC} = cos\ \theta$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| So, | $\sin(90^o - A) = \cos A$ | | $\cos(90^o - A) = \sin A$ |
| | $\tan(90^o - A) = \cot A$ | and | $\cot(90^o - A) = \tan A$ |
| | $\sec(90^o - A) = \operatorname{cosec} A$ | | $\operatorname{cosec}(90^o - A) = \sec A$ |

**ఉదాహరణ – 8.** $\dfrac{\boldsymbol{sec35^0}}{\boldsymbol{cosec\ 55^0}}$ **ను గణించుము**

సాధన : sec A = cosec $(90^0 - A)$

$sec35^0 = \text{cosec}\ (90^0 - 35^0)$

$\sec 35^0 = \text{cosec}\ 55^0$

$$\frac{sec35^0}{cosec\ 55^0} = \frac{cosec\ 55^0}{cosec\ 55^0} = 1$$

**ఉదాహరణ -9. cos 7A = sin(A – 6º ) ఇంకా 7A అల్పకోణం అయిన A విలువ ఎంత ?**

సాధన : : Given cos 7A = sin(A – 6º )

| $\cos\theta = sin\ (90^0 - \theta)$ |
|---|

$sin\ (90^0 - 7A) = \sin(A - 6^0)$

$(90^0 - 7A)$ మరియు $(A - 6^0)$ లు అల్పకోణాలు

కావున $90^0 - 7A = A - 6^0$

$A + 7A = 90^0 + 6^0$

$8A = 96^0$

$$A = \frac{96^0}{8} = 12^0$$

**ఉదాహరణ -10. sin A = cos B అయిన A + B = $90^0$ అని చూపుము .**

సాధన : : sin A = cos B అని ఇవ్వబడింది

| $\cos\theta = sin\ (90^0 - \theta)$ |
|---|

$\sin A = sin\ (90^0 - B)$

A మరియు $90^0 - B$ లు అల్పకోణాలు

$A = 90^0 - B$

$\Rightarrow A + B = 90^0$

BALABHADRA SURESH

**ఉదాహరణ -11:** $\sin 81^0 + \tan 81^0$ **విలువను** $0^0$ **మరియు** $45^0$ **మధ్యత్రికోణమితీయ నిష్పత్తులలో చూపుము**

$$\sin\theta = \cos(90^0 - \theta)$$
$$\tan\theta = \cot(90^0 - \theta)$$

సాధన : $\sin 81^0 + \tan 81^0$

$= \cos(90^0 - 81^0) + \cot(90^0 - 81^0)$

$= \cos 9^0 + \cot 9^0$

**ఉదాహరణ -12. త్రిభుజం ABC లోని అంతరకోణాలు A, B మరియు C లు అయిన** $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$

సాధన : A, B మరియు C లు త్రిభుజం ABC లోని కోణాలు కావున

$A+B+C = 180^0$

ఇరువైపులా 2 చే భాగించగా

$$\frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = \frac{180^0}{2}$$

$$\frac{B+C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2}$$

ఇరువైపులా త్రికోణమితీయ నిష్పత్తి sin తీసుకొనగా

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(90^0 - \frac{A}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

$$\sin(90^0 - \theta) = \cos\theta$$

BALABHADRA SURESH

## అభ్యాసం 11.3

1. **విలువ కనుక్కోండి**

(i) $\frac{tan36^0}{cot54^0}$

సాధన : $\frac{tan36^0}{cot54^0} = \frac{cot(90^0 - 36^0)}{cot54^0} = \frac{cot54^0}{cot54^0} = 1$

$$\tan\theta = \cot(90^0 - \theta)$$

(ii) $\cos 12^0 - \sin 78^0$

సాధన : $\cos 12^0 - \sin 78^0$

$= \cos 12^0 - \cos(90^0 - 78^0)$

$= \cos 12^0 - \cos 12^0$

$= 0$

$$\sin\theta = \cos(90^0 - \theta)$$

(iii) $cosec\ 31^0 - \sec 59^0$

సాధన: $cosec\ 31^0 - \sec 59^0$

$= cosec\ 31^0 - cosec(\ 90^0 - 59^0)$

$= cosec\ 31^0 - cosec\ 31^0$

$= 0$

$\sec\theta = \text{cosec}(90^0 - \theta)$

**(iv) $\sin 15^0 \sec 75^0$**

సాధన: $\sin 15^0 \sec 75^0$

$\sec\theta = \text{cosec}(90^0 - \theta)$

$cose\ \theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

$= \sin 15^0 \times \text{cosec}(90^0 - 15^0)$

$= sin\ 15^0 \times \text{cosec}\ 15^0$

$= sin\ 15^0 \times \dfrac{1}{sin\ 15^0} = 1$

**(i) $\tan 26^0 \tan 64^0$**

సాధన: $\tan 26^0 \tan 64^0$

$\tan\theta = \cot(90^0 - \theta)$

$cot\ \theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

$= \ tan\ 26^0\ cot(\ 90^0 - 64^0)$

$= \tan 26^0 \times \cot 26^0$

$= \tan 26^0 \times \dfrac{1}{\tan 26^0} = 1$

2. నిరూపించండి

**(i) $\tan 48^0 \tan 16^0 \tan 42^0 \tan 74^0 = 1$**

సాధన: $\tan 48^0 \tan 16^0 \tan 42^0 \tan 74^0$

$\tan\theta = \cot(90^0 - \theta)$

$cot\ \theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

$= \ tan\ 48^0\ tan\ 16^0\ cot(\ 90^0 - 42^0\ )cot(\ 90^0 - 74^0)$

$= tan\ 48^0\ tan\ 16^0\ cot\ 48^0 \cot 16^0$

$= tan\ 48^0\ \times tan\ 16^0 \times \dfrac{1}{\tan 48^0} \times \dfrac{1}{\tan 16^0}$

$= 1$

**(ii) $\boldsymbol{cos36^0 . cos54^0 - sin36^0 . sin54^0}$**

సాధన: $cos36^0 . cos54^0 - sin36^0 . sin54^0$

$cos\theta = \sin(90^0 - \theta)$

$= \sin(90^0 - 36^0).\sin(90^0 - 54^0) - sin36^0 . sin54^0$

$= sin54^0 . sin36^0 - sin36^0 . sin54^0$

$= 0$

3. **$\tan 2A = \cot(\ A - \ 18^0)$ ,2A లఘుకోణం అయిన A విలువ కనుక్కోండి**

$\tan\theta = \cot(90^0 - \theta)$

సాధన: $\tan 2A = \cot(\ A - \ 18^0)$

$\cot(\ 90^0 - 2A)\ = \cot(A - 18^0)$

$90^0 - 2A = A - 18^0$

BALABHADRA SURESH

$A + 2A = 90^0 + 18^0$

$3A = 108^0 \Rightarrow A = \frac{108^0}{3} \Rightarrow A = 36^0.$

4. **A , B లు లఘుకోణాలు మరియు tan A = cot B అయిన A + B = 90° అని చూపుము.**

సాధన $\tan A = \cot B$

$\tan A = \tan(90^0 - B)$

$A = 90^0 - B$ (A , B లు లఘుకోణాలు)

$A + B = 90^0$

| $\cot\theta = \tan(90^0 - \theta)$ |
|---|

5. **A, B మరియు C లు త్రిభుజం ABC లోని అంతరకోణాలు అయిన $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$.**

సాధన: త్రిభుజం లోని అంతరకోణాల మొత్తం $=180^0$

$A+B+C= 180^0$

ఇరువైపులా 2 చే భాగించగా

$$\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{180^0}{2}$$

$$\frac{A+B}{2} = 90^0 - \frac{C}{2}$$

ఇరువైపులా త్రికోణమితీయ నిష్పత్తి sin తీసుకొనగా

$$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan\left(90^0 - \frac{C}{2}\right)$$

$$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$$

| $\tan(90^0 - \theta) = \cot\theta$ |
|---|

6. **sin 75° + cos 65° ను 0° మరియు 45° మధ్య గల విలువల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులలో తెలపుము**

.

సాధన: $\sin 75^0 + \cos 65^0$

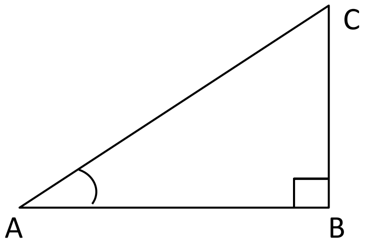
$= \cos(90^0 - 75^0) + \sin(90^0 - 65^0)$

$= \cos 15^0 + \sin 25^0$

| $\sin\theta = \cos(90^0 - \theta)$<br>$\cos\theta = \sin(90^0 - \theta)$ |
|---|

త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణాలు :

**ఉదాహరణ : $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ అని నిరూపించుము .**




సాధన: $In\ \Delta ABC, \angle B = 90^0$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం )

BALABHADRA SURESH

ఇరువైపులా $AC^2$చే భాగించగా

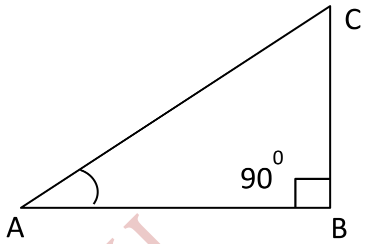
$$\frac{AB^2}{AC^2}+\frac{BC^2}{AC^2}=\frac{AC^2}{AC^2}$$

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2+\left(\frac{BC}{AC}\right)^2=1$$

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1$$

**ఉదాహరణ : $\boldsymbol{sec^2 A - tan^2 A = 1}$ అని నిరూపించుము**

సాధన: $In\ \Delta ABC\ ,\angle B=90^0$




$AB^2+BC^2=AC^2$(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం)

ఇరువైపులా $AB^2$ చే భాగించగా

$$\frac{AB^2}{AB^2}+\frac{BC^2}{AB^2}=\frac{AC^2}{AB^2}$$

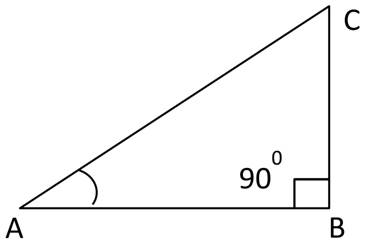
$$1+\left(\frac{BC}{AB}\right)^2=\left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$$1+tan^2 A=sec^2 A$$

$$sec^2 A-tan^2 A=1$$

**ఉదాహరణ : $\boldsymbol{cosec^2 A - cot^2 A = 1}$అని నిరూపించుము**

సాధన: $In\ \Delta ABC\ ,\angle B=90^0$




$AB^2+BC^2=AC^2$(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం)

ఇరువైపులా $BC^2$ చే భాగించగా

$$\frac{AB^2}{BC^2}+\frac{BC^2}{BC^2}=\frac{AC^2}{BC^2}$$

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2+1=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

$$cot^2 A+1=cosec^2 A$$

$$cosec^2 A-cot^2 A=1$$

## త్రికోణమితీయ సర్వ సమీకరణాలు

| | | |
|---|---|---|
| $sin^2 A+cos^2 A=1$<br>$sin^2 A=1-cos^2 A$<br>$\sin A=\sqrt{1-cos^2 A}$<br>$cos^2 A=1-sin^2 A$<br>$\cos A=\sqrt{1-sin^2 A}$ | $sec^2 A-tan^2 A=1$<br>$sec^2 A=1+tan^2 A$<br>$tan^2 A=sec^2 A-1$<br>$\sec A+\tan A=\frac{1}{secA-tanA}$<br>$\sec A-\tan A=\frac{1}{secA+tanA}$ | $cosec^2 A-cot^2 A=1$<br>$cosec^2 A=1+cot^2 A$<br>$cot^2 A=cosec^2 A-1$<br>$cosec\,A+\cot A=\frac{1}{cosecA-cotA}$<br>$cosec\,A-\cot A=\frac{1}{cosecA+cotA}$ |

BALABHADRA SURESH

**ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.**

**$0^0 \le A \le 90^0$ అన్ని విలువలకు త్రికోణమితీయ సర్వ సమీకరణాలు సత్యమేనా ?**

$\boldsymbol{sec^2A - tan^2A = 1} \qquad \boldsymbol{cosec^2A - cot^2A = 1}$

సాధన : sec $90^0$ మరియు tan $90^0$ లు నిర్వచించబడవు .

కావున $sec^2A - tan^2A = 1$ సమీకరణం $90^0$ కు నిర్వచించబడదు

Cosec $0^0$ మరియు cot $0^0$ లు నిర్వచించబడవు.

కావున , $cosec^2A - cot^2A = 1$ సమీకరణం $0^0$ కు నిర్వచించబడదు

**ఇవి చేయండి**

**(i) $\sin A = \frac{15}{17}$, అయిన cos A విలువ కనుగొనుము .**

సాధన : $sin^2A + cos^2A = 1$

$$cos^2A = 1 - sin^2A = 1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{225}{289} = \frac{289 - 225}{289} = \frac{64}{289}$$

$$\cos A = \sqrt{\frac{64}{289}} \Rightarrow \cos A = \frac{8}{17}$$

**(ii) $\tan x = \frac{5}{12}$, అయిన $sec\ x$ విలువ కనుగొనుము**

సాధన : $sec^2x - tan^2x = 1$

$$sec^2x = 1 + tan^2x$$

$$= 1 + \left(\frac{5}{12}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{25}{144}$$

$$= \frac{169}{144}$$

$$\sec x = \sqrt{\frac{169}{144}} \Rightarrow \sec x = \frac{13}{12}$$

**(iii) cosec $\theta = \frac{25}{7}$, అయిన cot $\theta$ విలువ కనుగొనుము**

సాధన : $cosec^2\theta - cot^2\theta = 1$

$$cot^2\theta = cosec^2\theta - 1$$

$$= \left(\frac{25}{7}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{625}{49} - 1$$

$$= \frac{625 - 49}{49}$$

$$= \frac{576}{49}$$

$$\cot\theta = \sqrt{\frac{576}{49}} \Rightarrow \cot\theta = \frac{24}{7}$$

**ప్రయత్నించండి**

**క్రింది వాటి విలువలను సకారణంగా కనుగొనుము .**

BALABHADRA SURESH

$(i)$ $\frac{sin^2 15^0+sin^2 75^0}{cos^2 36^0+cos^2 54^0}$

సాధన : $\frac{sin^2 15^0 + sin^2 75^0}{cos^2 36^0 + cos^2 54^0}$

$= \frac{sin^2 15^0 + cos^2 15^0}{sin^2 54^0 + cos^2 54^0} = \frac{1}{1} = 1$

$\sin\theta = \cos(90^0 - \theta)$

$\sin 75^0 = \cos(90^0 - 75^0) = \cos 15^0$

$\cos\theta = \sin(90^0 - \theta)$

$\cos 36^0 = \sin(90^0 - 36^0) = \sin 54^0$

$(ii)$ **$\sin 5^0 \cos 85^0 + \cos 5^0 \sin 85^0$**

సాధన: $sin\, 5^0\, cos\, 85^0 + cos\, 5^0\, sin\, 85^0$

$= sin\, 5^0 \times sin\, 5^0 + cos\, 5^0 \times cos\, 5^0$

$= sin^2 5^0 + cos^2 5^0 = 1$

$\cos 85^0 = \sin 5^0$
$\sin 85^0 = \cos 5^0$

$(iii)$ **$\sec 16^0\ cosec\ 74^0 - \cot 74^0 \tan 16^0$**

సాధన: $sec\, 16^0\ cosec\ 74^0 - cot\, 74^0\, tan\, 16^0$

$= sec\, 16^0 \times sec\, 16^0 - tan\, 16^0 \times tan\, 1$

$= sec^2 16^0 - tan^2 16^0$

$= 1$

$cose\ \theta = \sec(90^0 - \theta)$
$cosec\ 74^0 = \sec(90^0 - 74^0) = sec\ 16^0$
$\cot\theta = \tan(90^0 - \theta)$
$\cot 74^0 = \tan(90^0 - 74^0) = tan\ 16^0$

$sec^2 A - tan^2 A = 1$

**ఉదాహరణ -13. $\cot\theta + \tan\theta = \sec\theta\ cosec\ \theta$ నిరూపించండి**

సాధన: LHS = $\cot\theta + \tan\theta$

$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{cos^2\theta + sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \frac{1}{sin\,\theta\, cos\,\theta}$

$= \frac{1}{sin\,\theta} \times \frac{1}{cos\,\theta}$

$= cosec\ \theta\ .\sec\theta$

**ఉదాహరణ -14. $tan^2\theta + tan^4\theta = sec^4\theta - sec^2\theta$ నిరూపించండి**

సాధన: L.H.S=$tan^2\theta + tan^4\theta$

$= tan^2\theta(1 + tan^2\theta)$

$= (sec^2\theta - 1)sec^2\theta$

$= sec^4\theta - sec^2\theta = R.H.S$

$sec^2 A - tan^2 A = 1$
$\Rightarrow sec^2 A = 1 + tan^2 A$
$sec^2 A - 1 = tan^2 A$

**ఉదాహరణ – 15: $\sqrt{\frac{1 + cos\,\theta}{1 - cos\,\theta}} = cosec\ \theta + cot\ \theta$ నిరూపించండి.**

సాధన : $L.H.S = \sqrt{\frac{1 + cos\,\theta}{1 - cos\,\theta}}$

$= \sqrt{\frac{(1 + cos\,\theta)(1 + cos\,\theta)}{(1 - cos\,\theta)(1 + cos\,\theta)}}$

$= \sqrt{\frac{(1 + cos\,\theta)^2}{1 - cos^2\,\theta}}$

BALABHADRA SURESH

$$= \sqrt{\frac{(1+cos\,\theta)^2}{sin^2\,\theta}} \qquad (1 - cos^2\theta = sin^2\theta)$$

$$= \frac{1+cos\,\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{sin\,\theta} + \frac{cos\,\theta}{sin\,\theta} = cosec\,\theta + \cot\theta = R.H.S$$

## అభ్యాసం 11.4

1. కింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి :

(i) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \text{cosec}\,\theta)$

సాధన : $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \text{cosec}\,\theta)$

$$= \left(1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)\left(1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{cos\,\theta + sin\,\theta + 1}{cos\,\theta}\right)\left(\frac{sin\,\theta + cos\,\theta - 1}{sin\,\theta}\right)$$

$$= \left[\frac{(sin\,\theta + cos\,\theta)^2 - 1^2}{sin\,\theta\, cos\,\theta}\right]$$

$$= \left(\frac{sin^2\theta + cos^2\theta + 2\,sin\,\theta\, cos\,\theta - 1}{sin\,\theta\, cos\,\theta}\right)$$

$$= \frac{1 + 2\,sin\,\theta\,cos\,\theta - 1}{sin\,\theta\,cos\,\theta}$$

$$= \frac{2\,sin\,\theta\,cos\,\theta}{sin\,\theta\,cos\,\theta} = 2$$

**(ii)** $(\boldsymbol{sin\,\theta + cos\,\theta})^2 + (\boldsymbol{sin\,\theta - cos\,\theta})^2$

సాధన: $(sin\,\theta + cos\,\theta)^2 + (sin\,\theta - cos\,\theta)^2$

$$= sin^2\theta + cos^2\theta + 2\,sin\,\theta\,cos\,\theta + sin^2\theta + cos^2\theta - 2\,sin\,\theta\,cos\,\theta$$

$$= 1 + 1 = 2$$

| $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$ |
|---|

**(iii)** $(\boldsymbol{sec^2\theta - 1})(\boldsymbol{cosec^2\theta - 1})$

సాధన: $(sec^2\theta - 1)(cosec^2\theta - 1)$

$$= tan^2\theta \times cot^2\theta$$

$$= tan^2\theta \times \frac{1}{tan^2\theta} = 1$$

2. ***Show that*** $(\boldsymbol{cosec\,\theta - cot\,\theta})^2 = \dfrac{\boldsymbol{1 - cos\,\theta}}{\boldsymbol{1 + cos\,\theta}}$

సాధన: $(cosec\,\theta - cot\,\theta)^2$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

$$= \frac{(1 - \cos\theta)^2}{sin^2\theta}$$

$$= \frac{(1 - cos\,\theta)^2}{1 - cos^2\theta}$$

$$= \frac{(1 - cos\,\theta)(1 - cos\,\theta)}{(1 + cos\,\theta)(1 - cos\,\theta)}$$

BALABHADRA SURESH

$$= \frac{1 - cos\,\theta}{1 + cos\,\theta}$$

3. $\sqrt{\dfrac{\mathbf{1 + \sin A}}{\mathbf{1 - \sin A}}} = \mathbf{\sec A + \tan A}$ **నిరూపించుము**

సాధన: $\sqrt{\dfrac{1 + sin\,A}{1 - sin\,A}}$

$$= \sqrt{\frac{(1 + sin\,A)(1 + sin\,A)}{(1 - sin\,A)(1 + sin\,A)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 + sin\,A)^2}{1 - sin^2 A}}$$

$$= \frac{\sqrt{(1 + sin\,A)^2}}{\sqrt{cos^2 A}}$$

$$= \frac{1 + sinA}{\cos A}$$

$$= \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \sec A + \tan A$$

4. $\dfrac{\mathbf{1 - tan^2 A}}{\mathbf{cot^2 A - 1}} = \mathbf{tan^2 A}$ **అని చూపండి**

సాధన: $\dfrac{1 - tan^2 A}{cot^2 A - 1}$

$$= \frac{1 - tan^2 A}{\frac{1}{tan^2 A} - 1}$$

$$= \frac{1 - tan^2 A}{\frac{1 - tan^2 A}{tan^2 A}}$$

$$= (1 - tan^2 A) \times \frac{tan^2 A}{1 - tan^2 A}$$

$$= tan^2 A$$

5. $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{\cos\theta}} - \mathbf{\cos\theta = \tan\theta . \sin\theta}$ **చూపండి**

సాధన: $\dfrac{1}{cos\,\theta} - cos\,\theta$

$$= \frac{1 - cos^2\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \sin\theta$$

$$= \tan\theta\,.\sin\theta$$

6. $\mathbf{secA\ (1 - sinA)(secA + tanA)}$ **సూక్ష్మీకరించండి**

సాధన: $secA\ (1 - sinA)\ (secA + tanA)$

$$= \frac{1}{\cos A} \times (1 - sinA)\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)$$

BALABHADRA SURESH

$$= \frac{(1 - sinA)}{\cos A} \times \frac{(1 + sinA)}{\cos A}$$

$$= \frac{1 - sin^2A}{cos^2A}$$

$$= \frac{cos^2A}{cos^2A} = 1$$

**7.** $(\sin A + cosecA)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + tan^2A + cot^2A$ **అని నిరూపించండి**

సాధన: $L.H.S = (sin\, A + cosecA)^2 + (cos\, A + sec\, A)^2$

$$= sin^2A + cosec^2A + 2\sin A.cosec\, A + cos^2A + sec^2A + 2.cos\, A.\sec A$$

$$= sin^2A + cos^2A + cosec^2A + sec^2A + 2\sin A \times \frac{1}{\sin A} + 2cos\, A \times \frac{1}{\cos A}$$

$$= 1 + cot^2A + 1 + tan^2A + 1 + 2 + 2$$

$$= 7 + tan^2A + cot^2A$$

$$= R.H.S$$

**8.** $(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)(1 + \cot^2\theta)$ **సూక్ష్మీకరించండి**

సాధన: $(1 - cos\ \theta)\ (1 + cos\theta)\ (1 + cot^2\theta)$

$$= (1 - cos^2\theta)cosec^2\theta$$

$$= sin^2\theta \times \frac{1}{sin^2\theta} = 1$$

**9.** $\sec\theta + \tan\theta = p$ **అయితే** $\sec\theta - \tan\theta$ **విలువ ఎంత ?**

సాధన: $sec^2\theta - tan^2\theta = 1$

$$(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$$

$$\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{sec\,\theta + tan\,\theta}$$

$$\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{p}$$

**10.** $cosec\,\theta + \cot\theta = k$ **అయితే** $\cos\theta = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}$ **అని చూపండి .**

సాధన : $cosec\ \theta + \cot\theta = K$ --------(1)

$$cose^2\theta - cot^2\theta = 1$$

$$(cose\ \theta + \cot\theta)(cose\ \theta - cot\ \theta) = 1$$

$$k(cose\ \theta - cot\ \theta) = 1$$

$(cose\ \theta - cot\ \theta) = \frac{1}{k}$ --------(2)

BALABHADRA SURESH

(1)+(2)

$cosec\,\theta + \cot\theta = k$

$(cose\,\theta - cot\,\theta) = \frac{1}{K}$

$2cosec\,\theta \quad = \quad k + \frac{1}{k}$

$cosec\,\theta \quad = \quad \frac{k^2+1}{2k}$

$\sin\theta \quad = \frac{2k}{k^2+1}$

$$\sin\theta \times \frac{cos\,\theta}{sin\,\theta} = \frac{2k}{k^2+1} \times \frac{k^2-1}{2k}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{k^2-1}{k^2+1}$$

(1)-(2)

$cosec\,\theta + \cot\theta = k$

$(cosec\,\theta - cot\,\theta) = \frac{1}{K}$

$(-) \qquad (+) \qquad (-)$

$2\cot\theta \quad = \quad k - \frac{1}{k}$

$cot\,\theta \quad = \quad \frac{k^2-1}{2k}$

$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad = \quad \frac{k^2-1}{2k}$

BALABHADRA SURESH

THANK YOU

BALABHADRA SURESH

9866845885