అధ్యాయము 1

వాస్తవసంఖ్యలు (Real Numbers)

Prepared by : BALABHADRA SURESH , SA(MATHS).

ఇవి చేయండి

$a = bq + r$ అయ్యే విధంగా ధనపూర్ణ సంఖ్యలు a మరియు b లకు అనుగుణంగా q మరియు r ల విలువలను కనుగొనుము.

(i) $a = 13, \quad b = 3$ (ii) $a = 8, \ b = 80$ (iii) $a = 125, \ b = 5$

(iv) $a = 132, \ b = 11$

(i) $13 = 3 \times 4 + 1$

$q = 4$ మరియు $r = 1$

(ii) $8 = 80 \times 0 + 8$

$q = 0$ మరియు $\mathrm{r} = 8$

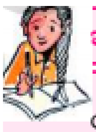
(iii) $125 = 5 \times 25 + 0$

$q = 25$ మరియు $r = 0$

(iv) $132 = 11 \times 12 + 0$

$q = 12$ మరియు $\mathrm{r} = 0$

యూక్లిడ్ భాగహార న్యాయం (Euclid's division lemma): $a = bq + r, 0 \le r < b$ అయ్యే విధంగా aమరియు b ల జతకు అనుగుణంగా q మరియు r లు ఏకైక పూర్ణసంఖ్యలు వ్యవస్థితం అవుతాయి



ఇవి చేయండి

యూక్లిడ్ విశేషవిధి ఉపయోగించి క్రింది వాటి యొక్క గ.సా.భాను కనుగొనండి.

(i) 50 మరియు 70 (ii) 96 మరియు 72 (iii) 300 మరియు 550

(iv) 1860 మరియు 2015

(i) $70 = 50 \times 1 + 20$
$50 = 20 \times 2 + 10$
$20 = 10 \times 2 + 0$

50 మరియు 70 ల గ.సా.భా $= 10$

(ii) $96 = 72 \times 1 + 24$
$72 = 24 \times 3 + 0$

96 మరియు 72 ల గ.సా.భా $= 24$

(iii) $550 = 300 \times 1 + 250$

$300 = 250 \times 1 + 50$
$250 = 50 \times 5 + 0$

300 మరియు 550 ల గ.సా.భా $= 50$

(i) $2015 = 1860 \times 1 + 155$
$1860 = 155 \times 12 + 0$

1860 మరియు 2015 ల గ.సా.భా $= 155$

అభ్యాసం - 1.1

1. యూక్లిడ్ విశేషవిధి ఆధారంగా క్రింది జతల గ.సా.భాను కనుగొనండి.

(i) 900 మరియు 270 (ii) 196 మరియు 38220 (iii) 1651 మరియు 2032

(i) $900 = 270 \times 3 + 90$

$270 = 90 \times 3 + 0$

900 మరియు 270 ల గ.సా.భా $= 90$

(ii) $38220 = 196 \times 195 + 0$

196 మరియు 38220 ల గ.సా.భా $= 195$

196) 38220 (195

38220

0

(iii) $2032 = 1651 \times 1 + 381$

$1651 = 381 \times 4 + 127$

$381 = 127 \times 3 + 0$

1651 మరియు 2032 ల గ.సా.భా $= 127$

2. q అనే ఒక పూర్ణ సంఖ్యకి ప్రతి ధన బేసి పూర్ణ సంఖ్య $6q + 1$ లేదా $6q + 3$ లేదా $6q + 5$ రూపంలో ఉంటుందని భాగహార విశేషవిధి ఆధారంగా చూపండి.

సాధన : a ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య మరియు b = 6

యూక్లిడ్ భాగహార శేష విధి ప్రకారం $a = 6q + r,$ ఏ దైనా పూర్ణసంఖ్య $q \geq 0$ మరియు $0 \leq r < 6$

అనగా r = 0 లేదా 1 లేదా 2 లేదా 3 లేదా 4 లేదా 5

$a = 6q$ లేదా $6q + 1$ లేదా $6q + 2$ లేదా $6q + 3$ లేదా $6q + 4$ లేదా $6q + 5$

$a = 6q = 2(3q) = 2m \Longrightarrow$ ఒక సరిసంఖ్య

$a = 6q + 1 = 2(3q) + 1 = 2m + 1 \Rightarrow$ ఒక బేసిసంఖ్య

$a = 6q + 2 = 2(3q + 1) = 2n \Rightarrow$ ఒక సరిసంఖ్య

$a = 6q + 3 = 6q + 2 + 1 = 2(3q + 1) + 1 = 2n + 1 \Rightarrow$ ఒక బేసిసంఖ్య

$a = 6q + 4 = 2(3q + 2) = 2z \Rightarrow$ ఒక సరిసంఖ్య

$a = 6q + 5 = 6q + 4 + 1 = 2(3q + 2) + 1 = 2z + 1 \Rightarrow$ ఒక బేసిసంఖ్య

$\therefore q$ ఏ దైనా పూర్ణసంఖ్యకి ప్రతి ధన బేసి పూర్ణ సంఖ్య $6q + 1$ లేదా $6q + 3$ లేదా $6q + 5$ రూపంలో ఉంటుంది

3. ఏదైనా ధనపూర్ణ సంఖ్య యొక్క వర్గం $3p$ లేదా $3p + 1$ రూపంలో ఉంటుందని యూక్లిడ్ భాగహార శేష విధి ఆధారంగా చూపుము .

సాధన : a ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య మరియు b = 3

యూక్లిడ్ భాగహార శేష విధి ప్రకారం $a = 3q + r,$ ఏ దైనా పూర్ణసంఖ్య $q \geq 0$ మరియు $0 \leq r < 3$

అనగా r = 0 లేదా 1 లేదా 2

$a = 3q$ లేదా $3q + 1$ లేదా $3q + 2$

$a = 3q$

$\Rightarrow a^2 = (3q)^2 = 9q^2 = 3(3q^2) = 3p$

$a = (3q + 1)$

$\Rightarrow a^2 = (3q + 1)^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3(3q^2 + 2q) + 1 = 3p + 1$

$a = (3q + 2)$

$\Rightarrow a^2 = (3q + 2)^2 = 9q^2 + 12q + 4 = 9q^2 + 12q + 3 + 1 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1$
$= 3p + 1$

∴ ఏదైనా ధనపూర్ణ సంఖ్య యొక్క వర్గం $3p$ లేదా $3p + 1$ రూపంలో ఉంటుంది

4. ఏదైనా ధన పూర్ణ సంఖ్య యొక్క ఘనం $9m$ లేదా $9m + 1$లేదా $9m + 8$ రూపంలో ఉంటుందని చూపుము .

సాధన : a ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య మరియు b =3

యూక్లిడ్ భాగహార శేష విధి ప్రకారం $a = 3q + r,$ ఏ దైనా పూర్ణసంఖ్య $q \geq 0$ మరియు $0 \leq r < 3$

అనగా $r = 0$ లేదా 1 లేదా 2

$a = 3q$ లేదా $3q + 1$ లేదా $3q + 2$

$a = 3q$

$\Rightarrow a^3 = (3q)^3 = 27q^3 = 9(3q^3) = 9m$

$a = (3q + 1)$

$\Rightarrow a^3 = (3q + 1)^3 = 27q^3 + 27q^2 + 9q + 1 = 9(3q^3 + 3q^2 + q) + 1 = 9m + 1$

$a = (3q + 2)$

$\Rightarrow a^3 = (3q + 2)^3 = 27q^3 + 54q^2 + 36q + 8 = 9(3q^3 + 3q^2 + 4q) + 8 = 9m + 8$

∴ ఏదైనా ధన పూర్ణ సంఖ్య యొక్క ఘనం $9m$ లేదా $9m + 1$లేదా $9m + 8$ రూపంలో ఉంటుంది

5. ఏదైనా ధన పూర్ణ సంఖ్య

nకు $n, n + 2$ లేదా $n + 4$ లలో ఏదైనా ఒకటి మాత్రమే 3 చే భాగింపబడుతుందని చూపుము .

సాధన : n ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య మరియు b =3

యూక్లిడ్ భాగహార శేష విధి ప్రకారం $n = 6q + r,$ ఏ దైనా పూర్ణసంఖ్య $q \geq 0$ మరియు $0 \leq r < 3$

అనగా $r = 0$ లేదా 1 లేదా 2

$n = 3q$ లేదా $3q + 1$ లేదా $3q + 2$

సందర్భం 1: $n = 3q$ (ఇది 3 చే భాగించబడుతుంది)

$n + 2 = 3q + 2$(ఇది 3 చే భాగించబడదు)

$n + 4 = 3q + 4 = 3q + 3 + 1 = 3(q + 1) + 1 = 3m + 1$(ఇది 3 చే భాగించబడదు)

సందర్భం 2: $n = 3q + 1$(ఇది 3 చే భాగించబడదు)

$n + 2 = 3q + 1 + 2 = 3q + 3 = 3(q + 1) = 3m$(ఇది 3 చే భాగించబడుతుంది)

$n+4=3q+1+4=3q+5=3q+3+2=3(q+1)+2=3m+2$(ఇది 3 చే భాగించబడదు)

సందర్భం 3: $n=3q+2$(ఇది 3 చే భాగించబడదు)

$n+2=3q+2+2=3q+4=3q+3+1=3(q+1)+1=3m+1$(ఇది 3 చే భాగించబడదు)

$n+4=3q+2+4=3q+6=3(q+2)=3m$(ఇది 3 చే భాగించబడుతుంది)

$\therefore$ ఏదైనా ధన పూర్ణ సంఖ్యnకు $n, n+2$ లేదా $n+4$ లలో ఏదైనా ఒకటి మాత్రమే 3 చే భాగింపబడుతుంది

అంకగణిత ప్రాధమిక సిద్ధాంతము : ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధానాంకముల లబ్ధంగా రాయవచ్చును మరియు ప్రధానాంకముల క్రమం ఏదై నప్పటికి ఈ కారణాంకాల లబ్ధం ఏకైకము

ప్రధానసంఖ్యలు ={2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,..}

సంయుక్త సంఖ్యలు ={4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20,21,22,24,25,26,27,28,30....}

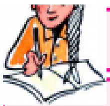
'1' ప్రధానసంఖ్యా కాదు సంయుక్త సంఖ్యా కాదు

గ. సా. కా (గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకము):

ఇచ్చిన సంఖ్యల యొక్క సామాన్య ప్రధాన కారణాంకముల కనిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధం

క. సా . గు (కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజం) :

ఇచ్చిన సంఖ్యల యొక్క ప్రధాన కారణాంకముల లో ప్రతి దాని గరిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధం



ఇవి చేయండి

ఇవ్వబడిన సంఖ్యల జతల యొక్క క.సా.గు మరియు గ.సా.భా లను ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి ఆధారంగా కనుగొనుము.

(i) 120, 90 (ii) 50, 60 (iii) 37, 49

(i) $120=2^3\times3^1\times5^1$

$90=2^1\times3^2\times5^1$

120,90 ల క.సా.గు $=2^3\times3^2\times5^1$

$=8\times9\times5=360$

120,90 ల గ.సా.కా $=2^1\times3^1\times5^1=30$

2	120
2	60
2	30
3	15
5	5
	1

2	90
3	45
3	15
5	5
	1

(ii) $50=2^1\times5^2$

$60=2^2\times3^1\times5^1$

50,60 ల క.సా.గు $=2^2\times3^1\times5^2$

$=4\times3\times25=300$

50,60 ల గ.సా.కా $=2^1\times5^1=10$

2	50
5	25
5	5
	1

2	60
2	30
3	15
5	5
	1

37	37
	1

7	49
	7

(iii) $37 = 37^1$

$49 = 7^2$

37,49 ల క.సా.గు $= 37^1 \times 7^2 = 37 \times 49 = 1813$

37,49 ల గ.సా.కా $= 1$ (సామాన్య ప్రధాన కారణాంకములు లేనపుడు గ.సా.కా $= 1$)

ప్రయత్నించండి

'n' మరియు 'm' ఏవేని సహజ సంఖ్యలకు $3^n \times 4^m$ యొక్క ఫలిత సంఖ్య 0 లేదా 5 తో అంతం కాదని చూపుము.

సాధన : ఒక సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధం లో 2 మరియు 5 ఉంటే ఆ సంఖ్య 0 తో అంతం అవుతుంది . 2 లేకుండా 5 ఉంటే ఆ సంఖ్య 5 తో అంతం అవుతుంది .

$3^n \times 4^m = 3^m \times (2^2)^m = 3^m \times 2^{2\,m}$

$3^n \times 4^m$ యొక్క ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధం లో 5 లేదు కావున .

$3^n \times 4^m$ యొక్క ఫలిత సంఖ్య 0 లేదా 5 తో అంతం కాదు .

అభ్యాసము - 1.2

1. క్రింది వానిలో ప్రతిసంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయండి.

(i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

(i)

2 | 140
2 | 70
5 | 35
7 | 7
1

$40 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$

$140 = 2^2 \times 5 \times 7$

(ii)

2 | 156
2 | 78
3 | 39
13

$156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13$

$156 = 2^2 \times 3 \times 13$

(iii)

3 | 3825
3 | 1275
5 | 425
5 | 85
17 | 17
1

$3825 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17$

$3825 = 3^2 \times 5^2 \times 17$

(iv)

5 | 5005
7 | 1001
11 | 143
13

$5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$

(v)

17 | 7429
19 | 437
23

$7429 = 17 \times 19 \times 23$

2. కింది పూర్ణ సంఖ్యల యొక్క క . సా . గు మరియు గ . సా . కా లను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధ పద్ధతి లో కనుగొనండి

(i) 12,15మరియు 21

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 15 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 21 \\ \hline 7 & 7 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$12 = 2^2 \times 3^1$

$15 = 3^1 \times 5^1$

$21 = 3^1 \times 7^1$

12,15మరియు 21 ల యొక్క క . సా . గు $= 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1 = 4 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$

12,15మరియు 21 ల యొక్క గ . సా . కా $= 3^1 = 3$

(ii) 17,23 మరియు 29

$17 = 17^1$

$23 = 23^1$

$29 = 29^1$

17,23 మరియు 29 ల యొక్క క . సా . గు $= 17 \times 23 \times 29 = 11339$

17,23 మరియు 29 ల యొక్క గ . సా . కా= 1 (సామాన్య ప్రధాన కారణాంకములు లేనపుడు గ.సా.కా $= 1$)

(iv) 8,9 మరియు 25

$$\begin{array}{r|l} 2 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$8 = 2^3$

$9 = 3^2$

$25 = 5^2$

8,9 *మరియు 25* ల యొక్క క . సా . గు $= 2^3 \times 3^2 \times 5^2 = 8 \times 9 \times 25 = 1800$

8,9 మరియు 25 ల యొక్క గ . సా . కా $= 1$ *(సామాన్య ప్రధాన కారణాంకములు లేనపుడు గ.సా.కా $= 1$)*

(v) 72 మరియు 108

$$\begin{array}{r|l} 2 & 72 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 108 \\ \hline 2 & 54 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

72 మరియు 108 ల యొక్క క . సా . గు $= 2^3 \times 3^3 = 8 \times 27 = 216$

72 మరియు 108 ల యొక్క గ . సా . కా $= 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

(vi) 306 మరియు 657

$$\begin{array}{r|l} 2 & 306 \\ \hline 3 & 153 \\ \hline 3 & 51 \\ \hline 17 & 17 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 657 \\ \hline 3 & 219 \\ \hline 73 & 73 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$306 = 2 \times 3^2 \times 17^1$

$657 = 3^2 \times 73$

306 మరియు 657 ల యొక్క క . సా . గు $= 2 \times 3^2 \times 17^1 \times 73 = 22338$

306 మరియు 657 ల యొక్క గ . సా . కా$= 3^2 = 9.$

3. n ఒక సహజసంఖ్య అయిన 6^n సంఖ్య 'సున్నా ' తో అంతమగునో , కాదో సరిచూడండి .

సాధన : ఒక సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధం లో 2 మరియు 5 ఉంటే ఆ సంఖ్య 0 తో అంతం అవుతుంది.

$6^n = (2 \times 3)^n = 2^n \times 3^n$

6^n ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధం లో 5 లేదు కావున 6^n సంఖ్య 'సున్నా ' తో అంతం కాదు .

4. $7 \times 11 \times 13 + 13$ మరియు $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ ఏ విధంగా సంయుక్త సంఖ్యలగునో వివరించండి

సాధన : $7 \times 11 \times 13 + 13$

= 13x (7x11 + 1)

= 13x (77 +1)

= 13x 78 =2x3x13^2 .

7x11x13+13 ను ప్రధానసంఖ్యల లబ్ధం గా వ్రాయగలము కావున ఇది ఒక సంయుక్తసంఖ్య .

$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$

$= 5 \times (7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 1)$

$= 5 \times (1008 + 1)$

$= 5 \times 1009$

$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ ను ప్రధానసంఖ్యల లబ్ధం గా వ్రాయగలము కావున ఇది ఒక సంయుక్తసంఖ్య

5. $(17 \times 11 \times 2) + (17 \times 11 \times 5)$ అనేది ఒక సంయుక్తసంఖ్య అని ఏ విధంగా నిరూపిస్తావు .

సాధన : $(17 \times 11 \times 2) + (17 \times 11 \times 5)$

$= 17 \times 11 \times (2 + 5)$

$= 17 \times 11 \times 7$

$\therefore (17 \times 11 \times 2) + (17 \times 11 \times 5)$ ను ప్రధానసంఖ్యల లబ్ధం గా వ్రాయగలము కావున ఇది ఒక సంయుక్తసంఖ్య .

6. 6^{100} యొక్క ఫలిత సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానం లోని అంకె ఏది ?

సాధన : $6^1 = 6$

$6^2 = 36$

$6^3 = 216$

ప్రతీ సహజ సంఖ్య n కు 6^n యొక్క ఒకట్ల స్థానం లోని అంకె = 6 కావున

. 6^{100} యొక్క ఫలిత సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానం లోని అంకె = 6 .

అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు వాటి దశాంశ రూపాలు :

అకరణీయ సంఖ్యలు $\left(\frac{p}{q}, q \neq 0\right)$ అంతమయ్యే దశాంశం (terminating decimal)లేదా అంతం కాని ఆవర్తనమయ్యే దశాంశం (non terminating repeating decimal) రూపం లో ఉంటాయి .

ఇవి చేయండి

కింది అంతమొందే దశాంశాలను అకరణీయ సంఖ్యలుగా $(\frac{p}{q}, q \neq 0$ మరియు p, q లు సాపేక్ష ప్రధానాంకాలు) రాయండి.

(i) 15.265 (ii) 0.1255 (iii) 0.4 (iv) 23.34 (v) 1215.8

(i) $15.265 = \frac{15265}{1000} = \frac{3053}{200} = \frac{3053}{2^3 \times 5^2}$

(ii) $0.1255 = \frac{1255}{10000} = \frac{251}{2000} = \frac{251}{2^4 \times 5^3}$

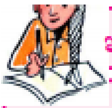
(iii) $0.4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

(iv) $23.34 = \frac{2334}{100} = \frac{1167}{50} = \frac{1167}{2^1 \times 5^2}$

(v) $1215.8 = \frac{12158}{10} = \frac{6079}{5}$

సిద్ధాంతం -1.3 : x అనేది ఒక ఆకరణీయ సంఖ్య మరియు దీని దశాంశ రూపం ఒక అంతమయ్యే దశాంశము , అయినపుడు x ను p, q లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు అయిఉన్న $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్తపరచవచ్చు , మరియు q యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం $2^n \times 5^m$ అగును . ఇందులో n,m లు అనేవి ఋణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు .

సిద్ధాంతం-1.4: n, m లు ఋణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు q యొక్కప్రధానకారణాంకాల లబ్ధ రూపం $2^n \times 5^m$ కలిగినటువంటి ఆకరణీయ సంఖ్య $x = \frac{p}{q}$ అయిన ,x యొక్క దశాంశ రూపం ఒక అంతమయ్యే దశాంశం అగును .



ఇది చేయండి

కింది అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{p}{q}$ రూపంలో వున్నాయి. ఇందులో q యొక్క రూపం 2^n5^m మరియు ఇందులో n, m లు ఋణేతర పూర్ణసంఖ్యలు అయిన వీటిని దశాంశ రూపాలలోనికి మార్చండి.

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{7}{25}$ (iii) $\frac{51}{64}$ (iv) $\frac{14}{25}$ (v) $\frac{80}{100}$

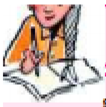
(i) $\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2 \times 5^0} = 0.75$

(ii) $\frac{7}{25} = \frac{7}{2^0 \times 5^2} = 0.28$

(iii) $\frac{51}{64} = \frac{51}{2^6 \times 5^0} = 0.796875$

(iv) $\frac{14}{25} = \frac{14}{2^0 \times 5^2} = 0.56$

(v) $\frac{80}{100} = \frac{4}{5} = \frac{4}{2^0 \times 5^1} = 0.8$



ఇది చేయండి

కింది అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశాలుగా రాయండి. భాగఫలంలో ఆవర్తనం చెందే అంకెల సమూహాన్ని కనుగొనండి.

(i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{2}{7}$ (iii) $\frac{5}{11}$ (iv) $\frac{10}{13}$

(i) $\frac{1}{3} = 0.333\ldots\ldots = 0.\overline{3}$

భాగఫలంలో ఆవర్తనం చెందే అంకెల సమూహం = 3 .

(ii) $\frac{2}{7} = 0.285714285\ldots\ldots = 0.\overline{285714}$

భాగఫలంలో ఆవర్తనం చెందే అంకెల సమూహం = 285714.

(iii) $\frac{5}{11} = 0.4545\ldots\ldots = 0.\overline{45}$

భాగఫలంలో ఆవర్తనం చెందే అంకెల సమూహం = 45.

(iv) $\frac{10}{13} = 0.7692307\ldots = 0.\overline{769230}$

భాగఫలంలో ఆవర్తనం చెందే అంకెల సమూహం=769230.

సిద్ధాంతం-1.5: n, m లు ఋణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు q యొక్కప్రధానకారణాంకాల లబ్ధం $2^n \times 5^m$ రూపంలో లేకుంటే ఆకరణీయ సంఖ్య $x = \frac{p}{q}$ అయిన ,x యొక్క దశాంశ రూపం ఒక అంతంకాని ఆవర్తనమయ్యే దశాంశం అగును

ఉదాహరణ -5: నిర్వచింపబడిన సిద్ధాంతాల ఆధారంగా , భాగహారం చేయ కుండానే క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలు అంతమయ్యే దశాంశాలో , అంతంకాని ఆవర్తనమయ్యే దశాంశాలో తెలపండి .

(i). $\frac{16}{125} = \frac{16}{5^3}$ ------అంతమయ్యే దశాంశం.

(ii). $\frac{25}{32} = \frac{25}{2^5}$ ------అంతమయ్యే దశాంశం.

(iii). $\frac{100}{81} = \frac{100}{3^4}$ ---- అంతంకాని ఆవర్తనమయ్యే దశాంశం.

(iv). $\frac{41}{75} = \frac{41}{3^1 \times 5^2}$ -----అంతంకాని ఆవర్తనమయ్యే దశాంశం.

ఉదాహరణ-6: క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలను భాగహారం చేయ కుండానే దశాంశ రూపంలో రాయండి .

(i). $\frac{35}{50} = \frac{7}{10} = 0.7$

(ii). $\frac{21}{25} = \frac{21}{5^2} = \frac{21 \times 2^2}{5^2 \times 2^2} = \frac{21 \times 4}{(5 \times 2)^2} = \frac{84}{100} = 0.84$

(iii). $\frac{7}{8} = \frac{7}{2^3} = \frac{7 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{7 \times 125}{(2 \times 5)^3} = \frac{875}{1000} = 0.875$

అభ్యాసం -1.3

1. క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ రూపంలో రాయండి. ఇందులో ఏవి అంతమయ్యే దశాంశాలో , ఏవి అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశాలో తెలపండి .

(i) $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3 \times 125}{(2 \times 5)^3} = \frac{375}{1000} = 0.375$ -అంతమయ్యే దశాంశం.

(ii) $\frac{229}{400} = \frac{229}{2^4 \times 5^2} = \frac{229 \times 5^2}{2^4 \times 5^2 \times 5^2} = \frac{229 \times 25}{(2 \times 5)^4} = \frac{5725}{10000} = 0.5725$ -అంతమయ్యే దశాంశం

(iii) $4\frac{1}{5} = \frac{21}{5} = \frac{21 \times 2}{5 \times 2} = \frac{42}{10} = 4.2$ -అంతమయ్యే దశాంశం.

(iv) $\frac{2}{11} = 0.1818 \ldots = 0.\overline{18}$ - అంతంకాని ఆవర్తనమయ్యే దశాంశం

(v) $\frac{8}{125} = \frac{8}{5^3} = \frac{8 \times 2^3}{5^3 \times 2^3} = \frac{8 \times 8}{(5 \times 2)^3} = \frac{64}{1000} = 0.064$ -అంతమయ్యే దశాంశం

2. భాగహార ప్రక్రియ లేకుండానే క్రింది ఆకరణీయ సంఖ్యలలో ఏటిని అంతమయ్యే దశాంశాలుగా రాయగలమో ? ఏటిని అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశాలుగా రాయగలమో తెలపండి .

(i) $\frac{13}{3125} = \frac{13}{5^5}$ అంతమయ్యే దశాంశం

(ii) $\frac{11}{12} = \frac{11}{2^2 \times 3} \rightarrow$ అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం

(iii) $\frac{64}{455} = \frac{64}{5 \times 7 \times 13} \rightarrow$ అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం

(iv) $\frac{15}{600} = \frac{1}{40} = \frac{1}{2^3 \times 5} \rightarrow$ అంతమయ్యే దశాంశం

(v) $\frac{29}{343} = \frac{29}{7^3} \rightarrow$ అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం

(vi) $\frac{23}{2^3 \times 5^2} \rightarrow$ అంతమయ్యే దశాంశం

(vii) $\frac{129}{2^2 . 5^7 . 7^5} \rightarrow$ అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం

(viii) $\frac{9}{15} = \frac{3}{5} \rightarrow$ అంతమయ్యే దశాంశం

(ix) $\frac{36}{100} = \frac{9}{25} = \frac{9}{5^2} \rightarrow$ అంతమయ్యే దశాంశం

(x) $\frac{77}{210} = \frac{11}{30} = \frac{11}{2 \times 3 \times 5} \rightarrow$ అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం

3. క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ రూపంలో రాయండి.

(i). $\frac{13}{25} = \frac{13}{5^2} = \frac{13 \times 2^2}{5^2 \times 2^2} = \frac{13 \times 4}{(5 \times 2)^2} = \frac{52}{100} = 0.52$

(ii). $\frac{15}{16} = \frac{15}{2^4} = \frac{15 \times 5^4}{2^4 \times 5^4} = \frac{15 \times 625}{(2 \times 5)^4} = \frac{9375}{10000} = 0.9375$

(iii). $\frac{23}{2^3 \times 5^2} = \frac{23 \times 5}{2^3 \times 5^3} = \frac{115}{(2 \times 5)^3} = \frac{115}{1000} = 0.115$

(iv). $\frac{7218}{3^2 \times 5^2} = \frac{7218}{9 \times 5^2} = \frac{802}{5^2} = \frac{802 \times 2^2}{5^2 \times 2^2} = \frac{3208}{(5 \times 2)^2} = \frac{3208}{100} = 32.08$

(v). $\frac{143}{110} = \frac{143}{2 \times 5 \times 11} = \frac{13}{2 \times 5} = \frac{13}{10} = 1.3$

కరణీయ సంఖ్యలు : p, q లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$ అయిన $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయలేనటువంటి వాస్తవ సంఖ్యలను కరణీయ సంఖ్యలు (Q' లేదా S) అంటారు .

ఉదాహరణ : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, 0.1231452148 \ldots\ldots, 0.1011011101111 \ldots\ldots$

సిద్ధాంతం -1.6 : p అనేది ఒక ప్రధానసంఖ్య మరియు a ఒక ధనపూర్ణసంఖ్య అయితే

"a^2ను p నిశ్శేషంగా భాగిస్తే a ను pనిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది "

ఉదాహరణ -7: $\sqrt{2}$ ను కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి .

నిరూపణ : $\sqrt{2}$ అనేది ఒక అకరణీయసంఖ్య అనుకొనుము

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ (a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు)

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2 \rightarrow (1)$

$\Rightarrow b^2 = \frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow$ a^2 ను 2 భాగిస్తుంది

$\Rightarrow$ a ను 2 భాగిస్తుంది

$a = 2c$, c అనేది ఒక పూర్ణసంఖ్య

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$\Rightarrow a^2 = 4c^2$

$\Rightarrow 2b^2 = 4c^2$ (from (1))

$\Rightarrow b^2 = 2c^2$

$\Rightarrow c^2 = \frac{b^2}{2}$

$\Rightarrow$ b^2 ను 2 భాగిస్తుంది .

$\Rightarrow$ b ను 2 భాగిస్తుంది .

a మరియు b లకు 2 ఒక సామాన్య కారణాంకం అయినది .

ఇది a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలకు విరుద్ధత

(పరస్పర ప్రధానాంకాలకు 1 తప్ప ఉమ్మడి కారణాంకాలు ఉండవు)

$\sqrt{2}$ అనేది ఒక అకరణీయసంఖ్య అనేది అసత్యము

$\therefore$ $\sqrt{2}$ అనేది ఒక కరణీయసంఖ్య

ఉదాహరణ -8: 5 – $\sqrt{3}$ ని ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

సాధన : 5 – $\sqrt{3}$ అనేది ఒక అకరణీయసంఖ్య అనుకొనుము .

$5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$ (a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు)

$5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3}$

$\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b} = \frac{5b - a}{b}$

$5, a$ మరియు b లు పూర్ణసంఖ్యలు కావున $\dfrac{5b-a}{b}$ ఒక అకరణీయసంఖ్య

కావున $\sqrt{3}$ కూడా అకరణీయసంఖ్య అగును

ఇది అసత్యము . $\sqrt{3}$ ఒక కరణీయసంఖ్య అనే సత్యానికి విరుద్ధ భావన .

$\therefore$ $5-\sqrt{3}$ అనేది ఒక కరణీయసంఖ్య .

ఉదాహరణ -9 : $3\sqrt{2}$ ని ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

సాధన : $3\sqrt{2}$ అనేది ఒక అకరణీయసంఖ్య అనుకొనుము .

$3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ (a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు)

$$\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$$

$3, a$ మరియు b లు పూర్ణసంఖ్యలు కావున $\dfrac{a}{3b}$ ఒక అకరణీయసంఖ్య

కావున $\sqrt{2}$ కూడా అకరణీయసంఖ్య అగును

ఇది అసత్యము . $\sqrt{2}$ ఒక కరణీయసంఖ్య అనే సత్యానికి విరుద్ధ భావన .

$\therefore$ $3\sqrt{2}$ అనేది ఒక కరణీయసంఖ్య

ఉదాహరణ -10 : $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ని ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి

సాధన : $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ అనేది ఒక అకరణీయసంఖ్య అనుకొనుము .

$\sqrt{2}+\sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$ (a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు)

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} - \sqrt{3}$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$$\left(\sqrt{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} = \left(\frac{a}{b} - \sqrt{\mathbf{3}}\right)^2$$

$$2 = \left(\frac{a}{b}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\sqrt{3}\right)^{\mathbf{2}} - 2 \times \frac{a}{b} \times \sqrt{3}$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2} + 3 - \frac{2a}{b}\sqrt{3}$$

$$\frac{2a}{b}\sqrt{3} = \frac{a^2}{b^2} + 3 - 2 = \frac{a^2}{b^2} + 1 = \frac{a^2+b^2}{b^2}$$

$$\sqrt{3} = \frac{a^2+b^2}{b^2} \times \frac{b}{2a}$$

$$\sqrt{3} = \frac{a^2+b^2}{2ab}$$

$2, a$ మరియు b లు పూర్ణసంఖ్యలు కావున $\frac{a^2+b^2}{2ab}$ ఒక అకరణీయసంఖ్య కావున $\sqrt{3}$ కూడా అకరణీయసంఖ్య అగును ఇది అసత్యము . $\sqrt{3}$ ఒక కరణీయసంఖ్య అనే సత్యానికి విరుద్ధ భావన

$\therefore$ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ అనేది ఒక కరణీయసంఖ్య .

అభ్యాసం - 1.4

1. క్రింది వానిని కరణీయసంఖ్యలుగా నిరూపించండి .

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

సాధన : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ అనేది ఒక అకరణీయసంఖ్య అనుకొనుము .

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$ (a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు)

$$\sqrt{2} = \frac{b}{a}$$

a మరియు b లు పూర్ణసంఖ్యలు కావున $\frac{b}{a}$ ఒక అకరణీయసంఖ్య కావున $\sqrt{2}$ కూడా అకరణీయసంఖ్య అగును ఇది అసత్యము . $\sqrt{2}$ ఒక కరణీయసంఖ్య అనే సత్యానికి విరుద్ధ భావన .

$\therefore$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ అనేది ఒక కరణీయసంఖ్య

(ii) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$

సాధన : $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ అనేది ఒక అకరణీయసంఖ్య అనుకొనుము

$\sqrt{3}+\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ (a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు)

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b} - \sqrt{3}$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$$(\sqrt{3})^2 = \left(\frac{a}{b}-\sqrt{5}\right)^2$$

$$3 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + (\sqrt{5})^2 - 2\times\frac{a}{b}\times\sqrt{5}$$

$$3 = \frac{a^2}{b^2} + 5 - \frac{2a}{b}\sqrt{5}$$

$$\frac{2a}{b}\sqrt{5} = \frac{a^2}{b^2} + 5 - 3 = \frac{a^2}{b^2} + 2 = \frac{a^2+2b^2}{b^2}$$

$$\sqrt{5} = \frac{a^2 + 2b^2}{b^2} \times \frac{b}{2a}$$

$$\sqrt{5} = \frac{a^2 + 2b^2}{2ab}$$

$2, a$ మరియు b లు పూర్ణసంఖ్యలు కావున $\frac{a^2 + 2b^2}{2ab}$ ఒక అకరణీయసంఖ్య,

కావున $\sqrt{5}$ కూడా అకరణీయసంఖ్య అగును

ఇది అసత్యము . $\sqrt{5}$ ఒక కరణీయసంఖ్య అనే సత్యానికి విరుద్ధ భావన .

$\therefore$ $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ అనేది ఒక కరణీయసంఖ్య

(iii) $6 + \sqrt{2}$

సాధన : $6 + \sqrt{2}$ అనేది ఒక అకరణీయసంఖ్య అనుకొనుము

$6 + \sqrt{2} = \frac{a}{b}$ (a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు)

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} - 6 = \frac{a - 6b}{b}$$

a మరియు b లు పూర్ణసంఖ్యలు కావున $\frac{a - 6b}{b}$ ఒక అకరణీయసంఖ్య,

కావున $\sqrt{2}$ కూడా అకరణీయసంఖ్య అగును

ఇది అసత్యము . $\sqrt{5}$ ఒక కరణీయసంఖ్య అనే సత్యానికి విరుద్ధ భావన .

$\therefore$ $6 + \sqrt{2}$ అనేది ఒక కరణీయసంఖ్య

(iv) $\sqrt{5}$

నిరూపణ : $\sqrt{5}$ అనేది ఒక అకరణీయసంఖ్య అనుకొనుము

$\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ (a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు)

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$$5 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 5b^2 = a^2 \rightarrow (1)$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{a^2}{5}$$

$\Rightarrow$ a^2 ను 5 భాగిస్తుంది

$\Rightarrow$ a ను 5 భాగిస్తుంది

$a = 5c$, c అనేది ఒక పూర్ణసంఖ్య

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$a^2 = 25c^2$

$\Rightarrow\ 5b^2 = 25c^2$ (from (1))

$\Rightarrow\ b^2 = 5c^2$

$\Rightarrow\ c^2 = \frac{b^2}{5}$

$\Rightarrow\ b^2$ ను 5 భాగిస్తుంది .

$\Rightarrow\ b$ ను 5 భాగిస్తుంది .

a మరియు b లకు 5 ఒక సామాన్య కారణాంకం అయినది .

ఇది a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలకు విరుద్ధత (పరస్పర ప్రధానాంకాలకు 1 తప్ప ఉమ్మడి కారణాంకాలు ఉండవు)

$\sqrt{5}$ అనేది ఒక ఆకరణీయసంఖ్య అనేది అసత్యము

$\therefore\ \sqrt{5}$ అనేది ఒక కరణీయసంఖ్య

(v) $\mathbf{3 + 2\sqrt{5}}$

సాధన : $3 + 2\sqrt{5}$ అనేది ఒక అకరణీయసంఖ్య అనుకొనుము

$3 + 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ (a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు)

$2\sqrt{5} = \frac{a}{b} - 3 = \frac{a - 3b}{b}$

$\sqrt{5} = \frac{a-3b}{2b}$

a మరియు b లు పూర్ణసంఖ్యలు కావున $\frac{a - 3b}{2b}$ ఒక అకరణీయసంఖ్య,

కావున $\sqrt{5}$ కూడా అకరణీయసంఖ్య అగును

ఇది అసత్యము . $\sqrt{5}$ ఒక కరణీయసంఖ్య అనే సత్యానికి విరుద్ధ భావన .

$\therefore\ 3 + 2\sqrt{5}$ అనేది ఒక కరణీయసంఖ్య .

2. $\boldsymbol{p, q}$ **ప్రధానాంకాలు అయితే** $\boldsymbol{\sqrt{p} + \sqrt{q}}$ **కరణీయసంఖ్య అని నిరూపించండి .**

సాధన : $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ అనేది ఒక అకరణీయసంఖ్య అనుకొనుము

$$\sqrt{p}+\sqrt{q} = \frac{a}{b}$$ (a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు)

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}-\sqrt{q}$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$$\left(\sqrt{p}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}-\sqrt{q}\right)^2$$

$$p = \left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\sqrt{q}\right)^2-2\times\frac{a}{b}\times\sqrt{q}$$

$$p = \frac{a^2}{b^2}+q-\frac{2a}{b}\sqrt{q}$$

$$\frac{2a}{b}\sqrt{q} = \frac{a^2}{b^2}+q-p = \frac{a^2+(q-p)b^2}{b^2}$$

$$\sqrt{q} = \frac{a^2+(q-p)b^2}{b^2}\times\frac{b}{2a}$$

$$\sqrt{q} = \frac{a^2+(q-p)b^2}{2ab}$$

a మరియు b లు పూర్ణసంఖ్యలు కావున $\frac{a^2+(q-p)b^2}{2ab}$ ఒక అకరణీయసంఖ్య,

కావున $\sqrt{q}$ కూడా అకరణీయసంఖ్య అగును

ఇది అసత్యము . $\sqrt{q}$ ఒక కరణీయసంఖ్య అనే సత్యానికి విరుద్ధ భావన .

$\therefore$ $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ అనేది ఒక కరణీయసంఖ్య .

వాస్తవసంఖ్యలు (Real Numbers)- సంవర్గమానాలు (LOGARITHMS)

Prepared by : BALABHADRA SURESH , SA(MATHS).

1. సంవర్గమానాలను ప్రవేశ పెట్టిన వారు జాన్ నేపియర్ .

2. a, x లు ధన పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 1$ అయిఉండి $a^n = \mathrm{x}$ అయిన మనం $\log_a x = \mathrm{n}$ అని నిర్వ చిస్తాం.

3. $a^x = \mathrm{N}$ అయితే $x = \log_a N \; (a > 0 \; a \neq 1, N > 0 \; a, N \in R)$.

4. $5 = 10^x$ యొక్క సంవర్గమాన రూపం $x = \log_{10} 5$ $(\,logarithm\ of\ 5\ to\ the\ base\ 10)$లేదా

   (10 ఆధారం గా కలిగిన 5 యొక్క సంవర్గమానం) అని చదువుతాము

ఘాతరూపం	సంవర్గమాన రూపం
i) $3^5 = 243$	$\log_3 243 = 5$
ii) $64 = 2^x$	$\log_2 64 = x$
iii) $2^7 = 128$	$\log_2 128 = 7$

5. 10 ఆధారం గా కలిగిన సంవర్గమానా న్ని సాధారణ సంవర్గమానం $(common\ Logarithm)$అంటారు

6. సంవర్గమాన న్యాయలు $(a, x, y, \mathrm{N}$ లుధన వాస్తవ సంఖ్యలు $a \neq 1)$

   i) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

   ii) $\log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$

   iii) $\log_a x^m = m \times log_a x$

   iv) $\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \times log_a x$

   v) $a^{\log_a x} = x$

   vi) $\log_a a = 1$

   vii) $\log_a 1 = 0$

ప్రయత్నించండి (page-18)

కింది వాటిని ఘాతరూపంలో వ్రాసి తద్వారా చారరాసులను నిర్ణయించండి .

(i) $\mathbf{\log_2 32 = x}$

సాధన : $\log_2 32 = x$ యొక్క ఘాతరూపం $2^x = 32$

$$\Rightarrow 2^x = 2^5$$
$$\Rightarrow x = 5$$

(ii) $\log_5 625 = y$

సాధన : $\log_5 625 = y$ యొక్క ఘాతరూపం $5^y = 625$

$$\Rightarrow 5^y = 5^4$$
$$\Rightarrow y = 4$$

(iii) $\log_{10} 10000 = z$

సాధన : $\log_{10} 10000 = z$ యొక్క ఘాతరూపం $10^z = 10000$

$$\Rightarrow 10^z = 10^4$$
$$\Rightarrow z = 4$$

(iv) $\log_7 \frac{1}{343} = -a$

సాధన : $\log_7 \frac{1}{343} = -a$ యొక్క ఘాతరూపం $7^{-a} = \frac{1}{343}$ $\left[\frac{1}{343} = \frac{1}{7^3} = 7^{-3}\right]$

$$\Rightarrow 7^{-a} = 7^{-3} \Rightarrow a = 3$$

ఇది చేయండి :(page-19)

కింద లబ్దాల సంవర్గమానాలను రెండు సంవర్గమానాల మొత్తంగా రాయండి .

$log_a xy = \log_a x + \log_a y$

(i) 35×46

సాధన: $\log(35 \times 46) = \log 35 + \log 46$ 235×437

సాధన:$\log(235 \times 437) = \log 235 + \log 437$

(ii) 2437×3568

సాధన:$\log(2437 \times 3568) = \log 2437 + \log 3568$

కింది వాటి సంవర్గమానాలను రెండు సంవర్గమానాల భేదంగా రాయండి

$$\log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$$

(i) $\frac{23}{34}$

సాధన: $\log_{10} \frac{23}{34} = \log_{10} 23 - \log_{10} 34$

(ii) $\frac{373}{275}$

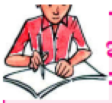
సాధన: $\log_{10} \frac{373}{275} = \log_{10} 373 - \log_{10} 275$

(iii) $(4325 \div 3734)$

సాధన: $\log_{10}(4325 \div 3734) = \log_{10} \frac{4325}{3734} = \log_{10} 4325 - \log_{10} 3734$

(iv) $5055 \div 3303$

సాధన: $\log_{10}(5055 \div 3303) = \log_{10}\frac{5055}{3303} = \log_{10} 5505 - \log_{10} 3303$



ఇది చేయండి

$\log_a x^n = n\log_a x$ ను ఉపయోగించి కింది ఘాతసంఖ్యల సంవర్గమానాలను మార్చిరాయండి.

(i) $\log_2 7^{25}$ (ii) $\log_5 8^{50}$ (iii) $\log 5^{23}$ (iv) $\log 1024$

(i) $\log_2 7^{25} = 25 \times \log_2 7$

(ii) $\log_5 8^{50} = 50 \times \log_5 8$

(iii) $\log 5^{23} = 23 \times \log 5$

(iv) $\log 1024 = \log 2^{10} = 10 \times \log 2$

ప్రయత్నించండి (page-21) కింది వాటి విలువలను కనుగొనండి

(i) $\log_2 32$

సాధన: $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5 \times \log_2 2 = 5 \times 1 = 5$

(ii) $\log_c \sqrt{c}$

సాధన: $\log_c \sqrt{c} = \log_c c^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \log_c c = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

(iii) $\log_{10} 0.001$

సాధన: $\log_{10} 0.001 = \log_{10}\frac{1}{1000} = \log_{10}\frac{1}{10^3} = \log_{10} 10^{-3} = -3 \times \log_{10} 10 = -3 \times 1 = -3$

(iv) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$

సాధన: $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27} = \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 3 \times \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = 3 \times 1 = 3$

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

$7 = 2^x$ అయితే $x = \log_2 7$ అని మనకు తెలుసు. అయితే $2^{\log_2 7}$ యొక్క విలువ ఎంత? మీ సమాధానాన్ని మరికొన్ని ఉదాహరణలతో సమర్థించండి.

పైదాని నుండి $a^{\log_a N}$ ను ఏ విధంగా సాధారణీకరిస్తారు?

సాధన : $7 = 2^x \Rightarrow \log_2 7 = x$

$\Rightarrow 2^{\log_2 7} = 2^x$

$\Rightarrow 2^{\log_2 7} = 7$

$a^{\log_a N} = N$ అగును

ఉదాహరణ -11: . $\log \frac{343}{125}$ ను విస్తరించండి .

సాధన: . $\log \frac{343}{125} = \log 343 - \log 125$

$= \log 7^3 - \log 5^3$

$= 3 \times \log 7 - 3 \times \log 5$

$= 3(\log 7 - \log 5)$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

$$\log x^m = m.\log x$$

ఉదాహరణ -12: $2 \log 3 + 3 \log 5 - 5 \log 2$ ను ఒకే సంవర్గమనంగా రాయండి .

సాధన : $2 \log 3 + 3 \log 5 - 5 \log 2$

$= \log 3^2 + \log 5^3 - \log 2^5$

$= \log 9 + \log 125 - \log 32$

$= \log \frac{9 \times 125}{32}$

$= \log \frac{1125}{32}$

$$\text{m} \log x = \log x^m$$

$$\log x + \log y - \log z = \log \frac{x \times y}{z}$$

ఉదాహరణ- 13: $3^x = 5^{x-2}$ సమీకరణాన్ని సాధించండి .

సాధన : $3^x = 5^{x-2}$

ఇరువైపులా సంవర్గమానం (log)తీసుకొనగా

$\log 3^x = \log 5^{x-2}$

$x \log 3 = (x-2) \log 5$

$x \log 3 = x \log 5 - 2 \log 5$

$x \log 5 - x \log 3 = 2 \log 5$

$x (\log 5 - \log 3) = 2 \log 5$

$$x = \frac{2 \log 5}{(\log 5 - \log 3)}$$

$$\log x^m = m.\log x$$

ఉదాహరణ -14: $2 \log 5 + \frac{1}{2} \log 9 - \log 3 = \log x$ అయితే x విలువను కనుగొనండి .

సాధన : $\log x = 2.\log 5 + 1/2 . \log 9 - \log 3$

$= \log 5^2 + \log 9^{\frac{1}{2}} - \log 3$

$$m.\log x = \log x^m$$

$$9^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3^{2 \times \frac{1}{2}} = 3$$

$= \log 25 \quad + \cancel{\log 3} - \cancel{\log 3}$

$\log x \quad = \log 25 \quad \Rightarrow x = 2$

అభ్యాసం – 1.5

1. **కింది వాటి విలువలను కనుగొనుము**

$\boxed{\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \times log_a x}$

$\boxed{\log_a x^m = m \times log_a x}$

(i) $\mathbf{\log_{25} 5} = \log_{5^2} 5 = \frac{1}{2} \times \log_5 5 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$

(ii) $\mathbf{\log_{81} 3} = \log_{3^4} 3 = \frac{1}{4} \times \log_3 3 = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}.$

(iii) $\mathbf{\log_2 \left(\frac{1}{16}\right)} = \log_2 \left(\frac{1}{2^4}\right) = \log_2 2^{-4} = -4 \times \log_2 2 = -4 \times 1 = -4$

(iv) $\mathbf{\log_7 1} = 0$

(v) $\mathbf{\log_x \sqrt{x}} = \log_x x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \log_x x = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

(vi) $\mathbf{\log_2 512} = \log_2 2^9 = 9 \times log_2 2 = 9 \times 1 = 9.$

(vii) $\mathbf{\log_{10} 0.01} = \log_{10} \frac{1}{100} = \log_{10} \frac{1}{10^2} = \log_{10} 10^{-2} = -2 \times \log_{10} 10 = -2 \times 1 = -2$

(viii) $\mathbf{\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}} = \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 3 \times \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = 3 \times 1 = 3$

(ix) $\mathbf{2^{2+\log_2 3}} = 2^2 \times 2^{\log_2 3} = 4 \times 3 = 12$

2. కింది వాటిని $\log N$ రూపంలో రాసి వీలగు సందర్భాలలో వాటి విలువలను కనుగొనండి .

(i) $\mathbf{\log 2 + \log 5}$

సాధన : $\log 2 + \log 5$

$= \log 2 \times 5 \quad (\log_a x + \log_a y = log_a xy)$

$= \log 10$

$= 1$

(ii) $\mathbf{\log_2 16 - \log_2 2}$

సాధన : $\log_2 16 - \log_2 2$

$= \log_2 \frac{16}{2} \quad (log_a x - log_a y = \log_a \frac{x}{y})$

$= \log_2 8$

$= \log_2 2^3$

$= 3 \times \log_2 2 \quad (\log_a x^m = m \times log_a x)$

$= 3 \times 1 = 3 \quad (\log_a a = 1)$

(iii) $\mathbf{3\ \log_{64} 4}$

సాధన : $3\ \log_{64} 4$

$= \log_{64} 4^3 \quad (m \times log_a x = log_a x^m)$

$= \log_{64} 64$

$= 1 \quad (\log_a a = 1)$

(iv) $\mathbf{2\ \log 3 - 3\ \log 2}$

సాధన : $2\ \log 3 - 3\ \log 2$

$= \log 3^2 - \log 2^3 \quad (m \times log_a x = log_a x^m)$

$= \log 9 - \log 8$

$= \log \frac{9}{8} \quad (log_a x - log_a y = \log_a \frac{x}{y})$

(v) $\mathbf{\log 10 + 2 \log 3 - \log 2}$

సాధన : $\log 10 + 2 \log 3 - \log 2$

$= \log 10 + \log 3^2 - \log 2 \quad (m \times log_a x = log_a x^m)$

$= \log 10 + \log 9 - \log 2$

$= \log 10 \times 9 - \log 2 \quad (\log_a x + \log_a y = log_a xy)$

$= \log 90 - \log 2$

$= \log \frac{90}{2} \quad (log_a x - log_a y = \log_a \frac{x}{y})$

$= \log 45$

3. $x = \mathbf{\log_2 3}$ మరియు $y = \mathbf{\log_2 5}$ **అని ఇవ్వబడిన, కిందివాటి విలువలను** xమరియు y **లలోతెలపండి .**

(i) $\mathbf{\log_2 15}$

సాధన : $\log_2 15$

$= \log_2 (3 \times 5)$

$= \log_2 3 + \log_2 5 \quad (\log_a xy = \log_a x + \log_a y)$

$= x + y$

(ii) $\mathbf{\log_2 7.5}$

సాధన : $\log_2 7.5$

$= \log_2 \frac{15}{2} \quad (7.5 = \frac{75}{10} = \frac{15}{2})$

$= \log_2 15 - \log_2 2$ $\quad\quad$ $(\log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y)$

$= \log_2 (3 \times 5) - log_2 2$

$= \log_2 3 + \log_2 5 - log_2 2$ $\quad\quad$ $(\log_a xy = \log_a x + \log_a y)$

$= x + y - 1$ $\quad\quad$ $(log_a a = 1)$

(iii) $\log_2 60$

సాధన : $\log_2 60$

$= \log_2 (2^2 \times 3 \times 5)$

$= \log_2 2^2 + \log_2 3 + \log_2 5$ $\quad\quad$ $(\because \log_a xyz = \log_a x + \log_a y + log_a z)$

$= 2 \times \log_2 2 + x + y$ $\quad\quad$ $(\because \log_a x^m = m \times log_a x)$

$= 2 \times 1 + x + y$ $\quad\quad$ $(\because log_a a = 1)$

$= 2 + x + y$

2 | 60
2 | 30
3 | 15
5

(iv) $\log_2 6750$

సాధన : $\log_2 6750$

$= \log_2 2 \times 3^3 \times 5^3$

$= \log_2 2 + log_2 3^3 + log_2 5^3$ $\quad\quad$ $(\because \log_a xy = \log_a x + \log_a y)$

$= 1 + 3 \times \log_2 3 + 3 \times \log_2 5$ $\quad\quad$ $(\because \log_a x^m = m \times log_a x)$

$= 1 + 3x + 3y$

2 | 6750
3 | 3375
3 | 1125
3 | 375
5 | 125
5 | 25
5

4. **కిందివాటిని విస్తరించండి .**

(i) $\log 1000$

సాధన : $\log 1000$

$= \log 2^3 \times 5^3$

$= \log 2^3 + \log 5^3$ $\quad\quad$ $(\because \log_a xy = log_a x + log_a y)$

$= 3 \log 2 + 3 \log 5$ $\quad\quad$ $(\because \log_a x^m = m \times log_a x)$

(ii) $\log \frac{128}{625}$

సాధన : $\log \frac{128}{625}$

$= \log 128 - \log 625$

$= \log 2^7 - \log 5^4$

$= 7 \log 2 - 4 \log 5$ $\quad\quad$ $(\because \log_a x^m = m \times log_a x)$

2 | 128
2 | 64
2 | 32
2 | 16
2 | 8
2 | 4
2

5 | 625
5 | 125
5 | 25
5

(iii) $\log x^2y^3z^4$

సాధన : $\log x^2y^3z^4$

$= \log x^2 + \log y^3 + \log z^4$ $(\because \log_a xy = \log_a x + \log_a y)$

$= 2\log x + 3\log y + 4\log z$ $(\because \log_a x^m = m \times log_a x)$

(iv) $\log \frac{p^2q^3}{r}$

సాధన : $\log \frac{p^2q^3}{r}$

$= \log p^2q^3 - \log r$ $(\because \log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y)$

$= \log p^2 + \log q^3 - \log r$ $(\because \log_a xy = \log_a x + \log_a y)$

$= 2\log p + 3\log q - \log r$ $(\because \log_a x^m = m \times log_a x)$

(iv) $\log \sqrt{\frac{x^3}{y^2}}$

సాధన : $log \sqrt{\frac{x^3}{y^2}}$

$= \log \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{y^2}}$

$= \log \sqrt{x^3} - \log \sqrt{y^2}$ $(\log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y)$

$= \log x^{\frac{3}{2}} - \log y$ $(\sqrt{a^m} = a^{\frac{m}{2}}$ మరియు $\sqrt{a^2} = a)$

$= \frac{3}{2}\log x - log\, y$ $(\log_a x^m = m \times log_a x)$

5. $\mathbf{x^2 + y^2 = 25xy}$ **అయిన** $\mathbf{2.\log(x+y) = 3.\log 3 + \log x + \log y}$ **అని నిరూపించండి .**

సాధన : $2.\log(x+y)$ $= \log(x+y)^2$ $(\because m \times log_a x = log_a x^m)$

$= \log(x^2 + y^2 + 2xy)$

= log (25xy + 2xy) ($\because$లెక్క ప్రకారం $x^2+y^2 = 25xy$)

$= \log(27xy)$

$= \log 27 + \log x + \log y$ $(\because \log(abc) = \log a + \log b + \log c)$

$= \log 3^3 + \log x + \log y$

$= 3.\log 3 + \log x + \log y \quad (\because \log_a x^m = m \times log_a x)$

6. $\log(\frac{x+y}{3}) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$ **అయిన** $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ **విలువను కనుగొనండి .**

సాధన : $\log(\frac{x+y}{3}) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$

$2 \times \log(\frac{x+y}{3}) = (\log x + \log y)$

$\log(\frac{x+y}{3})^2 = \log xy \quad (\because m \times log_a x = log_a x^m)$

$(\frac{x+y}{3})^2 = xy$

$x^2 + y^2 + 2xy = 9xy$

$x^2 + y^2 = 9xy - 2xy$

$x^2 + y^2 = 7xy$

$\frac{x^2+y^2}{xy} = 7$

$\frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = 7$

$\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X} = 7$

7. $(2.3)^x = (0.23)^y = 1000$ **అయిన** $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ **విలువను కనుగొనండి .**

సాధన : $(2.3)^x = (0.23)^y = 1000 = 10^3$

$(2.3)^x = 10^3$ మరియు $(0.23)^y = 10^3$

ఇరువైపులా సంవర్గమానం (log) తీసుకొనగా

$\log(2.3)^x = \log 10^3$ | $\log(0.23)^y = \log 10^3$

$x \log(2.3) = 3 \log 10$ | $y \log(0.23) = 3 \log 10$

$\boxed{\log a^m = m.\log a}$

$x \log(2.3) = 3$ | $y \log(0.23) = 3$

$\boxed{\log 10 = 1}$

$\log(2.3) = \frac{3}{x}$ | $\log(0.23) = \frac{3}{y}$

$\frac{3}{x} - \frac{3}{y} = \log(2.3) - \log(0.23) = log\frac{2.3}{0.23} = log\ 10 = 1$

$\frac{3}{x} - \frac{3}{y} = 1 \Rightarrow \quad 3\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = 1$

$\therefore \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$

8. $2^{x+1} = 3^{1-x}$ అయిన x విలువను కనుగొనండి .

సాధన : $2^{x+1} = 3^{1-x}$

ఇరువైపులా సంవర్గమానం (log) తీసుకొనగా

$\log 2^{x+1} = \log 3^{1-x}$

$(x+1) \log 2 = (1-x) \log 3$ $\qquad (\log_a x^m = m \times \log_a x)$

$x. \log 2 + \log 2 = \log 3 - x. \log 3$

$x. \log 2 + x. \log 3 = \log 3 - \log 2$

$x.(\log 2 + \log 3) = \log 3 - \log 2$

$x = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 3 + \log 2}$

9. (i) log 2 అకరణీయ సంఖ్యనా లేదా కరణీయ సంఖ్యనా ? మీ సమాధానాన్ని సమర్ధించండి .

సాధన : $log\, 2$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అవుతుంది .

సమర్ధించడం : log 2 ఒక అకరణీయ సంఖ్య అనుకొనుము

$\log 2 = \frac{p}{q}$ (p, q లు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు)

ఘాతరూపంలో వ్రాయగా

$10^{\frac{p}{q}} = 2 \Rightarrow \left(10^{\frac{p}{q}}\right)^q = 2^q \Rightarrow 10^p = 2^q$ ఇది విరుద్ధత .

ఎందుకనగా 10^p అనేది 0 తో అంతమౌతుంది కానీ 2^q అనేది 0 తో అంతం కాదు .

కావున $log\, 2$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అవుతుంది

9. (ii) log 100 అకరణీయ సంఖ్యనా లేదా కరణీయ సంఖ్యనా ? మీ సమాధానాన్ని సమర్ధించండి

సాధన : $log\, 100 = \log 10^2 = 2 \times \log 10 = 2 \times 1 = 2$ ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్య .

$\therefore$ $log\, 100$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య