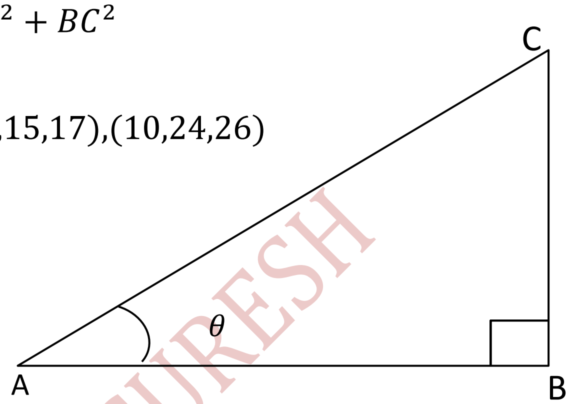
త్రికోణమితి (నోట్స్)

1. Father of trigonometry (త్రికోణమితి పిత) Hipparchus.
2. In India, the father of trigonometry (భారతదేశ త్రికోణమితి పిత) **Aryabhata .(ఆర్యభట్ట)**
3. బౌద్ధాయన సిద్ధాంతం (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం)

ఒక లంబకోణ త్రిభుజం లో కర్ణము మీది వర్గము, మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానం

4. ΔABC లో $\angle B = 90^0$ అయితే $AC^2 = AB^2 + BC^2$
5. కొన్ని పైథాగోరియన్ త్రికములు

(3,4,5),(5,12,13),(6,8,10),(7,24,25),(8,15,17),(10,24,26)
(20,21,29)



లంబకోణ త్రిభుజంలోని భుజాలు :

AC = కర్ణం

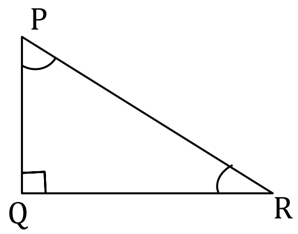
BC = $\angle$A (θ) యొక్క ఎదుటి భుజము .

AB = $\angle$A (θ) యొక్క ఆసన్న భుజము

ఇది చేయండి

క్రింద ఇచ్చిన త్రిభుజాలలో ఇచ్చిన కోణాల ఆధారంగా “కర్ణం”, “ఎదుటిభుజము” మరియు “ఆసన్న భుజము” లను గుర్తించి రాయండి .

1. కోణం R పరంగా

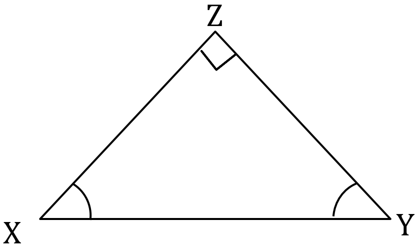


సాధన : కర్ణం =PR

$\angle$R యొక్క ఎదుటి భుజము .=PQ

$\angle$R యొక్క ఆసన్న భుజము =RQ

2. (i) కోణం X పరంగా



Sol: కర్ణం =XY

$\angle$X యొక్క ఎదుటి భుజము =ZY

$\angle$X యొక్క ఆసన్న భుజము =XZ

(ii) కోణం Y పరంగా

Sol: కర్ణం =XY

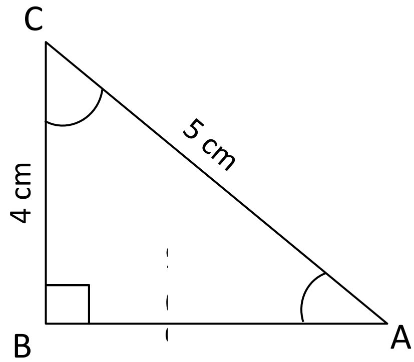
$\angle$Y యొక్క ఎదుటి భుజము =ZX

$\angle$Y యొక్క ఆసన్న భుజము =YZ

TRY THIS

BALABHADRA SURESH

ప్రక్క త్రిభుజం లో ఇచ్చిన కోణాల పరంగా “కర్ణం”, “ఎదుటిభుజము” మరియు “ఆసన్న భుజము” లను కనుగొనండి .



సాధన:: $In\ \Delta ABC\ ,\angle B\ = 90^0$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

$AB^2 + 4^2 = 5^2$

$AB^2 + 16 = 25$

$AB^2 + 16 = 25 \Rightarrow AB^2 = 25 - 16$

$AB^2 = 9 = 3^2$

AB=3 cm

కోణం C పరంగా

కర్ణం =AC=5 cm

∠C యొక్క ఎదుటి భుజము =AB=3 cm

∠C యొక్క ఆసన్న భుజము =BC=4 cm.

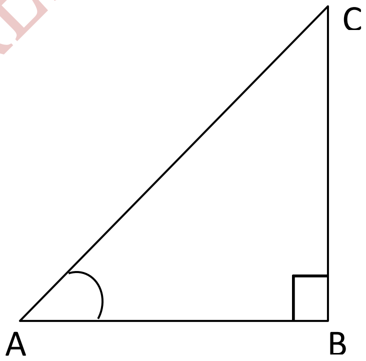
కోణం A పరంగా

కర్ణం =AC=5 cm

∠A యొక్క ఎదుటి భుజము =BC=4 cm

∠A యొక్క ఆసన్న భుజము =AB=3 cm.

త్రికోణ మితీయ నిష్పత్తులు



(i) $SinA = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము పొడవు}}{\text{కర్ణంపొడవు}} = \frac{BC}{AC}$

(ii) $\cos A = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము పొడవు}}{\text{కర్ణం పొడవు}} = \frac{AB}{AC}$

(iii) $\tan A = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము పొడవు}}{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము పొడవు}} = \frac{BC}{AB}$

(iv) $cosec\ A = \frac{\text{కర్ణం పొడవు}}{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము పొడవు}} = \frac{AC}{BC}$

(v) $sec\ A = \frac{\text{కర్ణం పొడవు}}{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము పొడవు}} = \frac{AC}{AB}$

(vi) $\cot A = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము పొడవు}}{(\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము పొడవు}} = \frac{AB}{BC}$

త్రికోణమితి నిష్పత్తుల మధ్య సంబంధం :

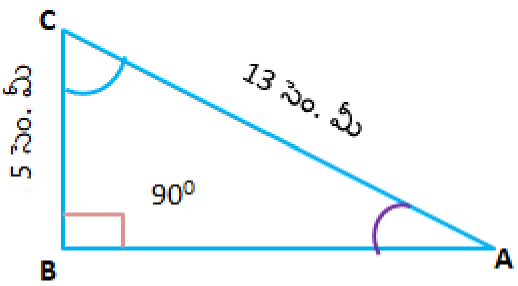
$(i)\ SinA = \frac{1}{cosec\ A}$, $cosec\ A = \frac{1}{SinA}$, $SinA \times cosec\ A = 1$

$(ii)\ \cos A = \frac{1}{\sec A}$, $\sec A = \frac{1}{\cos A}$, $\cos A \times \sec A = 1$

$(iii)\ \tan A = \frac{1}{\cot A}$, $\cot A = \frac{1}{\tan A}$, $\tan A \times \cot A = 1$

$(iv)\ \frac{SinA}{\cos A} = \tan A,\quad \frac{\cos A}{SinA} = \cot A$

ఇవి చేయండి



1. **పక్కనున్న లంబకోణత్రిభుజంలో (i) sin C (ii) cos C and (iii) tan C లను కనుగొనుము .**

సాధన :: ΔABC లో $\angle B = 90^0$

(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

BALABHADRA SURESH

$AB^2 + 5^2 = 13^2$

$AB^2 + 25 = 169$

$AB^2 = 169 - 25$

$AB^2 = 144 \Rightarrow AB = \sqrt{144} \Rightarrow AB = 12\ cm$

$(i)\ sin\ C = \dfrac{\angle C \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణం}} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{12}{13}$

$\therefore \sin C = \frac{12}{13}$

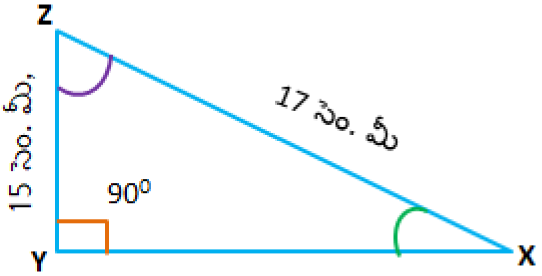
$(ii)\ cos\ C = \dfrac{\angle C \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణం}} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{5}{13}$

$\therefore \cos C = \frac{5}{13}$

$(iii)\ tan\ C = \dfrac{\angle C \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}{\angle C \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము}} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{12}{5}$

$\therefore \tan C = \frac{12}{5}$

2. **ఒక త్రిభుజం XYZ లో, ∠Y లంబకోణము మరియు XZ = 17cm and YZ = 15 cm అయితే (i) sin X (ii) cos Z (iii) tan X లను కనుగొనుము .**



సాధన : In $\Delta XYZ, \angle Y = 90^0$

$XY^2 + YZ^2 = XZ^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

$XY^2 + 15^2 = 17^2$

$XY^2 + 225 = 289$

$XY^2 = 289 - 225$

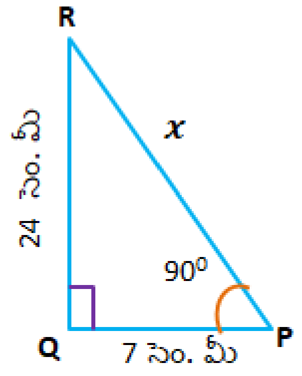
$XY^2 = 64 \Rightarrow XY = \sqrt{64} \Rightarrow XY = 8\text{ cm}$

$(i)\ sin\ X = \dfrac{\angle X \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణం}} = \dfrac{YZ}{XZ} = \dfrac{15}{17}$

$(ii)\ cos\ Z = \dfrac{\angle Z \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణం}} = \dfrac{YZ}{XZ} = \dfrac{15}{17}$

$(iii)\ tan\ X = \dfrac{\angle X \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}{\angle X \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము}} = \dfrac{YZ}{XY} = \dfrac{17}{8}$

3. **త్రిభుజం PQR లో Q లంబకోణము మరియు ∠P విలువ x మరియు PQ = 7 సెం. మీ. మరియు QR = 24 సెం. మీ. అయిన sin x మరియు cos x ల విలువలు కనుగొనుము .**



సాధన : ΔPQR లో $\angle Q = 90^0$

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

$PR^2 = 7^2 + 24^2$

$PR^2 = 49 + 576$

$PR^2 = 625 \Rightarrow PR = \sqrt{625} \Rightarrow PR = 25$ సెం. మీ

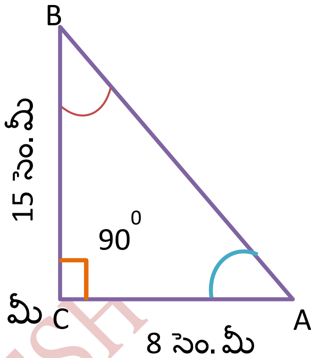
BALABHADRA SURESH

$$\sin x = \frac{\angle x \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణం}} = \frac{RQ}{PR} = \frac{24}{25}$$

$$\cos x = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణం}} = \frac{PQ}{PR} = \frac{7}{25}$$

ప్రయత్నించండి

ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ABCలో C లంబకోణము . BC + CA = 23 సెం. మీ మరియు BC – CA = 7 సెం. మీ, అయిన sin A మరియు tan B లను కనుగొనుము.



సాధన : BC + CA = 23 సెం. మీ ------(1)

BC – CA = 7 సెం. మీ ---------(2)

(1)+(2)⇒ 2 BC=23+7=30 సెం. మీ

$BC = \frac{30}{2} = 15$సెం. మీ

(1)⇒ $15 + CA = 23 \Rightarrow CA = 23 - 15 \Rightarrow CA = 8$ సెం. మీ

ΔABC లో $\angle C = 90^0$

$AB^2 = AC^2 + BC^2$(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

$AB^2 = 8^2 + 15^2$

$AB^2 = 64 + 225 = 289$

$AB = \sqrt{289} = 17$ సెం. మీ

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణం}} = \frac{BC}{AB} = \frac{15}{17}$$

$$\tan B = \frac{\angle B \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}{\angle B \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము}} = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{15}$$

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

(i) ఏదో ఒక విలువ x కు sin x $= \frac{4}{3}$ సాధ్యమా ? ఎందుకు ?

సాధన : లంబకోణ త్రిభుజంలో ప్రతీ భుజము కర్ణము కంటే చిన్నది

$$\Rightarrow \frac{\text{భుజము}}{\text{కర్ణం}} < 1$$

ఇచ్చినది $\sin x = \frac{4}{3} > 1$.అందువల్ల $\sin x = \frac{4}{3}$ సాధ్యము కాదు .

(ii) sin A మరియు **cos A ల విలువలు ఎల్లప్పుడూ 1కంటే తక్కువగా ఉంటాయి . ఎందుకు ?**

సాధన : లంబకోణ త్రిభుజంలో ప్రతీ భుజము కర్ణము కంటే చిన్నది.

$$\Rightarrow \frac{\text{భుజము}}{\text{కర్ణం}} < 1$$

అందువల్ల sin A మరియు cos A ల విలువలు ఎల్లప్పుడూ 1కంటే తక్కువగా ఉంటాయి .

(iii) tan A అంటే **tan** మరియు **A**ల లబ్ధము .

సాధన : అసత్యము . tan A అనగా కోణం A యొక్క tangent విలువ .

ప్రయత్నించండి

BALABHADRA SURESH

1. $\dfrac{\sin A}{\cos A}$ విలువ $\tan A$ అవుతుందా ?

సాధన: అవుతుంది

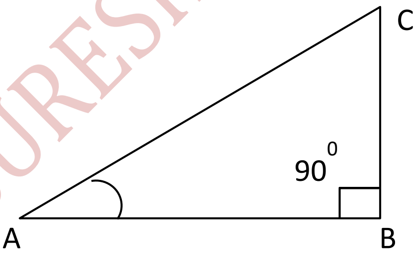
$$\frac{\sin \mathrm{A}}{\cos \mathrm{A}} = \frac{\dfrac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణం}}}{\dfrac{\angle \mathrm{A} \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణం}}} = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}{\angle \mathrm{A} \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము}} = \tan \mathrm{A}$$

2. $\dfrac{\cos A}{\sin A}$ విలువ $\cot A$ అవుతుందా ?

సాధన: అవుతుంది

$$\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\dfrac{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణం}}}{\dfrac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణం}}} = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజము}}{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజము}} = \cot\ A$$

ఉదాహరణ -1: tan A $= \frac{3}{4}$, అయిన కోణం A యొక్క మిగతా త్రికోనమితీయ నిష్పత్తులను కనుక్కోండి .



సాధన : $\tan \mathrm{A} = \frac{3}{4} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$

BC=3, AB=4

ΔABC లో $\angle B = 90^0$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

$AC^2 = 4^2 + 3^2$

$AC^2 = 16 + 9$

$AC^2 = 25 \Rightarrow AC = \sqrt{25} \Rightarrow AC = 5$

$Sin\ A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{3}{5},$

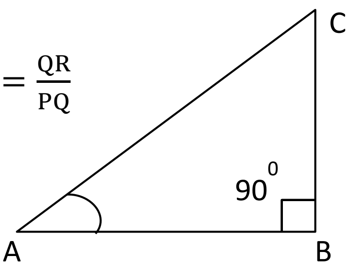
$cos\ A = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4}{5}$

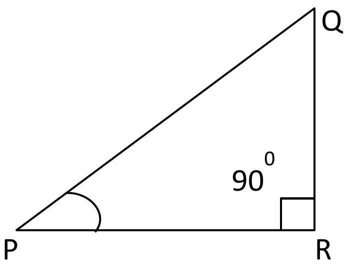
$cosec\ A = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5}{3}$

$Sec\ A = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{5}{4}$

$cot\ A = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{4}{3}$

ఉదాహరణ -2: sin A = sin P అయ్యేటట్లు ∠A మరియు ∠P లు లఘుకోణాలు అయిన ∠A =∠P అని చూపుము.





సాధన : $\sin \mathrm{A} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$ మరియు $\sin \mathrm{P} = \frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{PQ}}$

లెక్క ప్రకారం $\sin \mathrm{A} = \sin \mathrm{P}$

$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{PQ}} = \mathrm{k}$ (అనుకొనుము)

$\mathrm{BC} = \mathrm{k.AC}$ మరియు $\mathrm{QR} = \mathrm{k.PQ}$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$$\frac{AB}{PR} = \frac{\sqrt{AC^2 - BC^2}}{\sqrt{PQ^2 - QR^2}} = \frac{\sqrt{AC^2 - k^2AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - k^2PQ^2}} = \frac{\sqrt{AC^2(1-k^2)}}{\sqrt{PQ^2(1-k^2)}} = \frac{AC}{PQ}$$

BALABHADRA SURESH

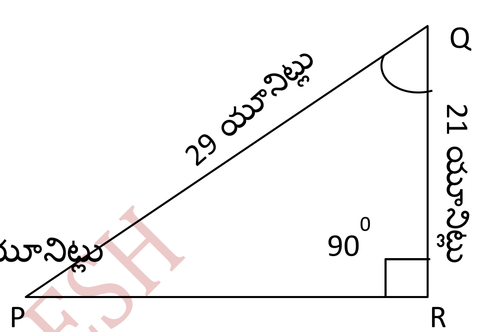
కావున $\frac{AC}{PQ} = \frac{AB}{PR} = \frac{BC}{QR}$

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (భు . భు . భు. సరూపత నియమం)

$\therefore \angle A = \angle P$ (సరూప త్రిభుజాల అనూరుపకోణాలు సమానం)

ఉదాహరణ -3: P వద్ద లంబకోణం కల్గిన లంబకోణ త్రిభుజం PQR లో $PQ = 29$ యూనిట్లు , $QR = 21$ యూనిట్లు మరియు $\angle PQR =$ అయిన (i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ మరియు (ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ విలువలను కనుగొనుము .

సాధన :ΔPQR లో $\angle R = 90^0$



$PR^2 + QR^2 = PQ^2$(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

$PR^2 = PQ^2 - QR^2$

$PR^2 = 29^2 - 21^2$

$PR^2 = 841 - 441 = 400 \Rightarrow PR = \sqrt{400} \Rightarrow PR = 20$యూనిట్లు

$\sin\theta = \frac{PR}{PQ} = \frac{20}{29}$

$\cos\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{21}{29}$

$$(i)\ \ cos^2\theta + sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 + \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{441}{841} + \frac{400}{841} = \frac{441+400}{841} = \frac{841}{841} = 1$$

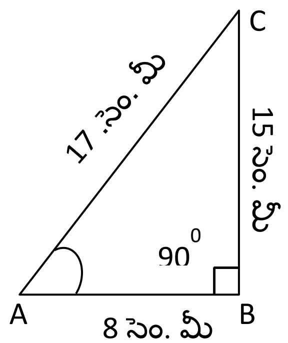
$$(ii)\ \ cos^2\theta - sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{441}{841} - \frac{400}{841} = \frac{441-400}{841} = \frac{41}{841}$$

అభ్యాసం - 11.1

1. ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో భుజాలు AB, BC మరియు CA ల పొడవులు వరుసగా 8 సెం. మీ, 15 సెం. మీ మరియు 17 సెం. మీ అయిన sin A, cos A మరియు tan A ల విలువలు కనుగొనుము .

సాధన : AB=8 సెం. మీ, BC=15 సెం. మీ CA=17 సెం. మీ

ఇక్కడ CA కర్ణము అవుతుంది కావున $\angle B = 90^0$



$sin\ A = \frac{BC}{AC} = \frac{15}{17}$

$cos\ A = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{17}$

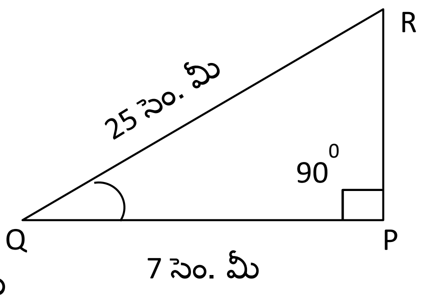
$tan\ A = \frac{BC}{AB} = \frac{15}{8}$

2. **లంబకోణ త్రిభుజం PQR యొక్క భుజాలు $PQ = 7$ సెం. మీ, $QR = 25$ సెం. మీ మరియు $\angle P = 90^0$ అయిన $\tan Q - \tan R$ కనుగొనుము .**

సాధన : ΔPQR లో $\angle P = 90^0$

BALABHADRA SURESH

$PR^2 + PQ^2 = RQ^2$(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)



$PR^2 = RQ^2 - PQ^2$

$PR^2 = 25^2 - 7^2$

$PR^2 = 625 - 49 = 576 \Rightarrow PR = \sqrt{576} \Rightarrow PR = 24$ సెం. మీ

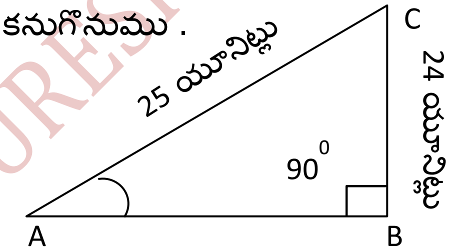
$$\tan Q = \frac{PR}{PQ} = \frac{24}{7}$$

$$\tan R = \frac{PQ}{PR} = \frac{7}{24}$$

$$\tan Q - \tan R = \frac{24}{7} - \frac{7}{24} = \frac{24 \times 24 - 7 \times 7}{7 \times 24} = \frac{576 - 49}{168} = \frac{527}{168}$$

3. B వద్ద లంబకోణం కల్గిన లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో $a = 24$ యూనిట్లు , $b = 25$ యూనిట్లు మరియు

$\angle BAC = \theta$. అయిన $\cos\theta$ మరియు $\tan\theta$ ల విలువలు కనుగొనుము .



సాధన : a=BC = 24 యూనిట్లు, b =AC= 25 యూనిట్లు

ΔABC లో $\angle B = 90^0$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

$AB^2 = AC^2 - BC^2$

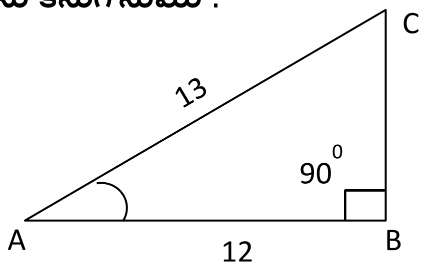
$AB^2 = 25^2 - 24^2$

$AB^2 = 625 - 576 = 49 \Rightarrow AB = \sqrt{49} \Rightarrow AB = 7$ యూనిట్లు

$$\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{7}{25}$$

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{24}{7}$$

4 $\cos A = \frac{12}{13}$ అయిన $\sin A$ మరియు $\tan A$ ల విలువలను కనుగొనుము .



సాధన : $\cos A = \frac{12}{13} = \frac{AB}{AC}$

AB=12, AC=13

ΔABC లో $\angle B = 90^0$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

$BC^2 = AC^2 - AB^2$

$BC^2 = 13^2 - 12^2$

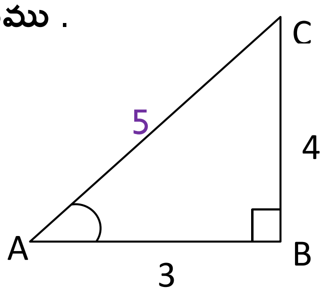
$BC^2 = 169 - 144 = 25 \Rightarrow BC = \sqrt{25} \Rightarrow BC = 5$ యూనిట్లు

BALABHADRA SURESH

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{13}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{12}$$

5. 3. tan A=4అయిన sin A మరియు cos A ల విలువలను కనుగొనుము .



సాధన : $tan\, A = \frac{4}{3} = \frac{BC}{AB}$

Let $BC = 4$, $AB = 3$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

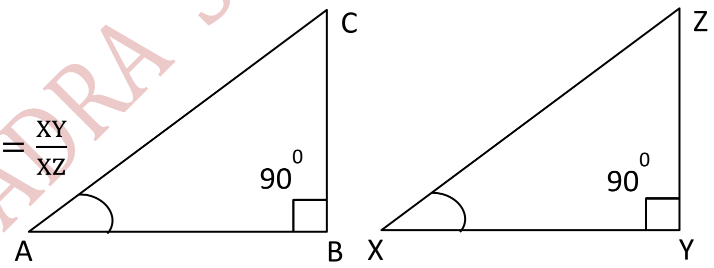
$AC^2 = (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25$

$AC = \sqrt{25} = 5$

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$$

6. ΔABC , ΔXYZ లలో cos A = cos X అయ్యేటట్లు $\angle A$ మరియు $\angle X$ లు లఘుకోణాలైన $\angle A = \angle X$ అని చూపుము .



సాధన : $\cos A = \frac{AB}{AC}$ మరియు $\cos X = \frac{XY}{XZ}$

లెక్కప్రకారం $\cos A = \cos X$

$\frac{AB}{AC} = \frac{XY}{XZ} = k$ (k ఒక స్థిర సంఖ్య)

$AB = k.AC$ మరియు $XY = k.XZ$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి

$$\frac{BC}{YZ} = \frac{\sqrt{AC^2 - AB^2}}{\sqrt{XZ^2 - XY^2}} = \frac{\sqrt{AC^2 - k^2AC^2}}{\sqrt{XZ^2 - k^2XZ^2}} = \frac{\sqrt{AC^2(1-k^2)}}{\sqrt{XZ^2(1-k^2)}} = \frac{AC}{XZ}$$

కావున , $\frac{AC}{XZ} = \frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ}$

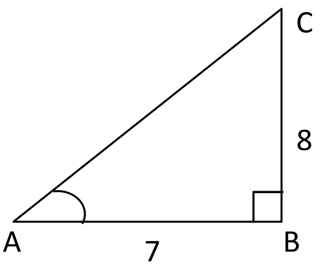
$\Delta ABC \sim \Delta XYZ$ (భు. భు. భు. సరూపత)

$\therefore$, $\angle A = \angle X$ (సరూప త్రిభుజాల అనూరుప కోణాలు సమానం)

7. $\cot\theta = \frac{7}{8}$ అయిన $(i)\ \frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ $(ii)\ \frac{(1+\sin\theta)}{\cos\theta}$ లను కనుగొనుము .

BALABHADRA SURESH

సాధన : $\cot\theta = \frac{7}{8} = \frac{AB}{BC}$



$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 7^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113$

$AC = \sqrt{113}$

$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{\sqrt{113}}$, $\quad \cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{7}{\sqrt{113}}$

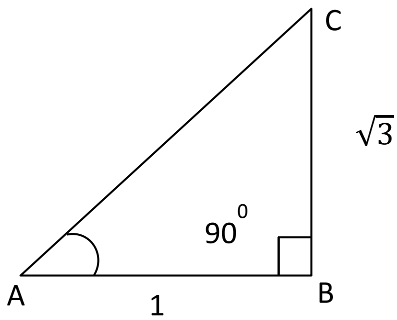
$(i)\ \frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$$= \frac{\left(1+\frac{8}{\sqrt{113}}\right)\left(1-\frac{8}{\sqrt{113}}\right)}{\left(1+\frac{7}{\sqrt{113}}\right)\left(1-\frac{7}{\sqrt{113}}\right)} = \frac{(\sqrt{113}+8)(\sqrt{113}-8)}{(\sqrt{113}+7)(\sqrt{113}-7)} = \frac{113-64}{113-49} = \frac{49}{64}$$

$$(ii)\ \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1+\frac{8}{\sqrt{113}}}{\frac{7}{\sqrt{113}}} = \frac{\sqrt{113}+8}{7}$$

8. **B వద్ద లంబకోణం కల్గిన త్రిభుజం ABC లో tan A = $\sqrt{3}$ అయిన (i) sin A cos C + cos A sin C (ii) cos A cos C – sin A sin C ల విలువలను కనుగొనుము**

సాధన : $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{BC}{AB}$



$BC = \sqrt{3}$, $AB = 1$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

$AC^2 = (1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$

$AC = \sqrt{4} = 2$

$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

$\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

$\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(i) sin A cos C + cos A sin C

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

(ii) cos A cos C – sin A sin C

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

BALABHADRA SURESH

త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువల పట్టిక :

	$\angle A$	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
		$\sqrt{\frac{0}{4}} = 0$	$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{4}{4}} = 1$
	sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
	cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{\sin A}{\cos A}$	$tan\ A$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	నిర్వచించబడదు
$\frac{1}{tan\ A}$	$cot\ A$	నిర్వచించబడదు	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\frac{1}{\cos A}$	$sec\ A$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	నిర్వచించబడదు
$\frac{1}{\sin A}$	$cosec\ A$	నిర్వచించబడదు	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

కోణం A విలువ 0^o నుండి 90^o కు పెరుగుతూ పోతుంటే sin A మరియు cos A విలువలు ఎలా మారుతూ ఉంటాయి ?

(i) A $\geq$ B అయిన sin A $\geq$ sin B అనడం సబబేనా ?

సాధన : A $\geq$ B అయిన sin A $\geq$ sin B అనడం సబబే. కోణం విలువ పెరిగితే దాని sin విలువ కూడా పెరుగుతుంది .

(ii) A $\geq$ B అయిన cos A $\geq$ cos B అనడం సబబేనా ?

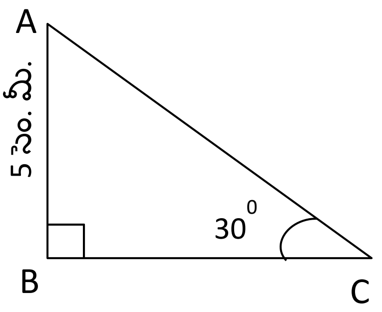
సాధన : కాదు . ఎందువలన అనగా కోణం విలువ పెరిగితే దాని cos విలువ తగ్గుతుంది .

A $\geq$ B అయిన cos A $\leq$ cos B అగును

ఉదాహరణ -4 : B వద్ద లంబకోణం కల్గిన ΔABCలో AB = 5 సెం. మీ. మరియు $\angle ACB = 30^o$ అయిన BC మరియు AC భుజాల పొడవులను కనుగొనండి.

BALABHADRA SURESH

సాధన : AB=5 సెం. మీ. మరియు $\angle ACB=30^\circ$



$$\tan 30^0 = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{BC}$$

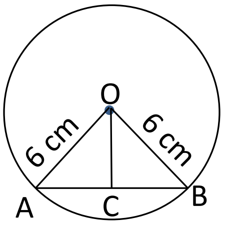
$BC = 5\sqrt{3}$ సెం. మీ

$$\sin 30^0 = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

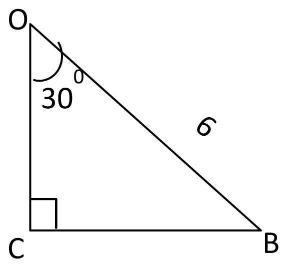
$AC = 5 \times 2 = 10$ సెం. మీ

ఉదాహరణ -5: 6 సెం. మీ. వ్యాసార్థం కలిగిన వృత్తంలో ఒక జ్యా కేంద్రం వద్ద 60° కోణం చేస్తుంది . ఆ జ్యా పొడవును కనుగొనండి.



సాధన : వృత్త వ్యాసార్థము OA=OB=6cm మరియు $\angle AOB = 60^0$

$OC \perp AB$ అయిన OC అనేది $\angle AOB$ కి కోణ సమద్విఖండన రేఖ



$$\angle AOC = \angle BOC = 30^0$$

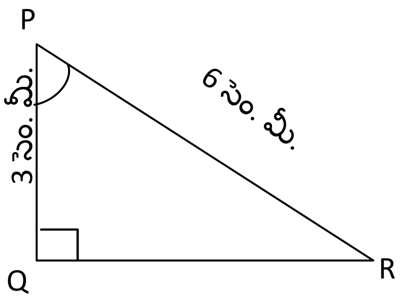
ΔCOB నుండి $sin30^0 = \frac{BC}{OB}$

$$\frac{1}{2} = \frac{BC}{6} \Rightarrow BC = \frac{6}{2} = 3cm$$

జ్యా పొడవు AB= 2BC= $2 \times 3cm = 6cm$

ఉదాహరణ -6. Q వద్ద లంబకోణం ఉన్న ΔPQR లో PQ = 3 సెం. మీ. మరియు PR = 6 సెం. మీ. అయిన $\angle QPR$ మరియు $\angle PRQ$ కనుగొనుము .

సాధన : PQ = 3 సెం. మీ. మరియు PR = 6 సెం. మీ.



$$\cos P = \frac{PQ}{PR} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \cos 60^0$$

$\Rightarrow \angle QPR = 60^\circ$

$$\sin R = \frac{PQ}{PR} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \sin 30^0$$

$\Rightarrow \angle PRQ = 30^0$

BALABHADRA SURESH

ఉదాహరణ -7. $\boldsymbol{sin\,(A-B) = \frac{1}{2}, cos\,(A+B) = \frac{1}{2}, 0^0 < A+B \le 90^0, A > B}$ **అయిన A మరియు B విలువలు కనుక్కోండి .**

సాధన : $sin\,(A-B) = \frac{1}{2} = sin\,30^0$

$\Rightarrow A - B = 30^0$----------(1)

$cos\,(A+B) = \frac{1}{2} = cos\,60^0$

$\Rightarrow \mathrm{A + B = 60^0}$----------(2)

(1)+(2)$\Rightarrow A - B + A + B = 30^0 + 60^0$

$\Rightarrow 2\mathrm{A} = 90^0 \Rightarrow \mathrm{A} = \frac{90^0}{2} = 45^0$

$\mathrm{A} = 45^0$ విలువను సమీకరణం (2) లో ప్రతిక్షేపించగా

$45^0 + B = 60^0$

$\Rightarrow B = 60^0 - 45^0 = 15^0$

$\therefore A = 45^0$ మరియు $B = 15^0$

అభ్యాసం - 11.2

1. క్రింది వాటి విలువలను కనుగొనండి .

(i) $\mathbf{sin\,45^0 + cos\,45^0}$

సాధన : $\sin 45^0 + \cos 45^0$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\times\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

(ii) $\dfrac{cos\,45^0}{sec\,30^0 + cosec\,60^0}$

Sol: $\dfrac{cos\,45^0}{sec\,30^0 + cosec\,60^0}$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

(iii) $\dfrac{\mathbf{sin\,30^0 + tan\,45^0 - cosec\,60^0}}{\mathbf{cot\,45^0 + cos\,60^0 - sec\,30^0}}$

సాధన : $\dfrac{sin\,30^0 + tan\,45^0 - cosec\,60^0}{cot\,45^0 + cos\,60^0 - sec\,30^0}$

$$= \frac{\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}} = 1$$

BALABHADRA SURESH

(iv) 2 tan²45° + cos²30° – sin² 60°.

సాధన : 2 tan²45° + cos²30° – sin² 60°.

$$= 2\times(1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2\times 1 = 2$$

(v) $\boldsymbol{\dfrac{sec^2 60^0 - tan^2 60^0}{sin^2 30^0 + cos^2 30^0}}$

సాధన : $\dfrac{sec^2 60^0 - tan^2 60^0}{sin^2 30^0 + cos^2 30^0} = \dfrac{(2)^2 - (\sqrt{3})^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{4-3}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{\frac{4}{4}} = \dfrac{1}{1} = 1$

2. క్రింది వాటి విలువలను కనుగొనండి .

(i) $\boldsymbol{\dfrac{2\tan 30^0}{1 + tan^2 45^0}}$

సాధన : $\dfrac{2\,tan\,30^0}{1 + tan^2 45^0} = \dfrac{2\times\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+(1)^2} = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{2}{2\times\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = tan\,30^0$

(ii) $\boldsymbol{\dfrac{1 - tan^2 45^0}{1 + tan^2 45^0}}$

సాధన : $\dfrac{1 - tan^2 45^0}{1 + tan^2 45^0} == \dfrac{1-1}{1+1} = \dfrac{0}{2} = 0$

(iii) $\boldsymbol{\dfrac{2\,tan\,30^0}{1 - tan^2 30^0}}$

సాధన : $\dfrac{2\,tan\,30^0}{1 - tan^2 30^0} = \dfrac{2\times\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= \sqrt{3}$

3. sin 60° cos 30° + sin 30° cos 60° విలువ గణించండి sin (60° + 30°) విలువ ఎంత ?

సాధన : $\sin 60^0 \cos 30^0 + \sin 30^0 \cos 60^0$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$sin(60^0 + 30^0) = \sin 90^0 = 1$

గమనించిన విషయం : $sin(60^0 + 30^0) = sin\,60^0\,cos\,30^0 + sin\,30^0\,cos\,60^0$

$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

4. $\boldsymbol{\cos(60^0 + 30^0) = cos\,60^0\,cos\,30^0 - sin\,60^0\,sin\,30^0}$ **అనడం సబబేనా ?**

సాధన : $\cos(60^0 + 30^0) = \cos 90^0 = 0$

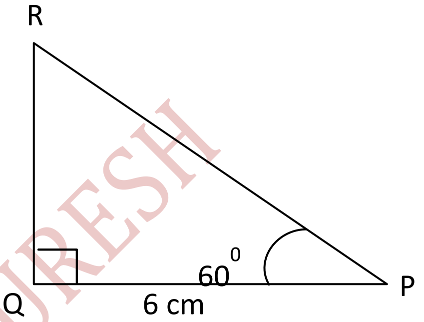
$$cos\ 60^0\ cos\ 30^0 - \ sin\ 60^0\ sin\ 30^0 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

$\therefore \cos(60^0 + 30^0) = cos\ 60^0\ cos\ 30^0 - \ sin\ 60^0\ sin\ 30^0$

$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

5. **Q వద్ద లంబకోణం కల్గిన ΔPQR లో $PQ = 6$సెం. మీ. $\angle RPQ = 60^0$ అయిన QR మరియు PR విలువలను కనుక్కోండి .**

సాధన : ΔPQR లో $\angle Q=90^0$



$PQ = 6$సెం. మీ. $\angle RPQ = 60^0$

$cos\ 60^0 = \frac{PQ}{PR}$

$\frac{1}{2} = \frac{6}{PR}$

$PR = \frac{6 \times 2}{1} = 12$

$\therefore PR = 12$ సెం. మీ

$\tan 60^0 = \frac{QR}{PQ}$

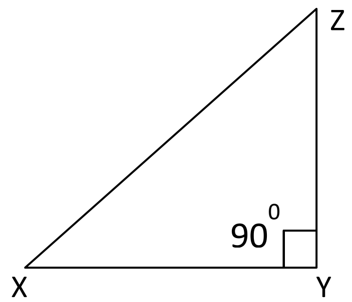
$\sqrt{3} = \frac{QR}{6}$

$QR = 6\sqrt{3}$ సెం . మీ.

6. **Y వద్ద లంబకోణం కల్గిన ΔXYZ లో $YZ = x$ మరియు $XZ = 2x$ అయిన $\angle YXZ$ మరియు $\angle YZX$ ల విలువలను నిర్ణయించుము.**

సాధన : $\angle YXZ = \alpha$ మరియు $\angle YZX = \beta$

$\sin\alpha = \frac{YZ}{XZ} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} = sin30^0$



$\sin\alpha = sin30^0$

$\therefore \alpha = \angle YXZ = 30^0$

$\alpha + 90^0 + \beta = 180^0$(త్రిభుజం లోని కోణాల మొత్తం)

$30^0 + 90^0 + \beta = 180^0$

$\beta = 180^0 - 120^0 = 60^0$

$\therefore \beta = \angle YZX = 60^0$

7. **$\sin(A + B) = \sin A + \sin B$ అనడం సబబేనా ? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించుము .**

సాధన : $\sin(A + B) = sin\ A + sin\ B$ అనడం సబబు కాదు

BALABHADRA SURESH

సమర్ధించడం :

$A = 30^0$ మరియు $B = 60^0$ తీసుకొనగా

$\sin(A+B) = \sin(30^0 + 60^0) = \sin 90^0 = 1$

$sin\ A + sin\ B = \sin 30^0 + sin\ 60^0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\sin(A+B) \neq sin\ A + sin\ B$

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

θ యొక్క ఏ లఘుకోణ విలువకు $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 4$ సత్యమౌతుంది ?

పై సమీకరణం $0^0 \le \theta \le 90^0$, లలో ఏ విలువలకు నిర్వచించబడదు ?

$$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1+sin\,\theta} = 4$$

సాధన : $\frac{cos\,\theta}{1-sin\,\theta} + \frac{cos\,\theta}{1+sin\,\theta} = 4$

$$\frac{\cos\theta(1+sin\,\theta)+cos\,\theta(1-sin\,\theta)}{1-sin^2\theta} = 4$$

$$\frac{\cos\theta(1+\sin\theta+1-\sin\theta)}{cos^2\theta} = 4$$

$$\frac{COS\ \theta \times 2}{cos^2\theta} = 4$$

$$\frac{2}{\cos\theta} = 4$$

$$\cos\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = cos60^0$$

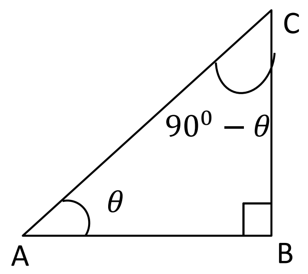
$\therefore\ \theta = 60^0$

$\theta = 90^0$ విలువకు సమీకరణం నిర్వచించబడదు .

ఎందువలన అనగా $\sin 90^0 = 1$.కావున , $1 - \sin\theta = 1 - sin\,90^0 = 1 - 1 = 0$

పూరక కోణాల త్రికోణ మితీయ నిష్పత్తులు :

రెండు కోణాల మొత్తం 90^0 అయితే వాటిని పూరక కోణాలు అందురు .



θ యొక్క పూరక కోణం = $(90^0 - \theta)$

ఉదాహరణ : $\sin(90^0 - \theta)$= $\cos\theta$ అని చూపుము (θ అల్ప కోణం)

సాధన : ΔABC లో $\angle B = 90^0$ మరియు $\angle A = \theta$

అపుడు $\angle C = 90^0 - \theta$

BALABHADRA SURESH

$$sin\,(90^0-\theta)=\frac{AB}{AC}=cos\,\theta$$

So,	$\sin(90^o-A)=\cos A$		$\cos(90^o-A)=\sin A$
	$\tan(90^o-A)=\cot A$	and	$\cot(90^o-A)=\tan A$
	$\sec(90^o-A)=\operatorname{cosec} A$		$\operatorname{cosec}(90^o-A)=\sec A$

ఉదాహరణ – 8. $\dfrac{sec35^0}{cosec\,55^0}$ ను గణించుము

సాధన : $\sec A=\operatorname{cosec}(90^0-A)$

$sec35^0=\operatorname{cosec}(90^0-35^0)$

$\sec 35^0=\operatorname{cosec} 55^0$

$$\frac{sec35^0}{cosec\,55^0}=\frac{cosec\,55^0}{cosec\,55^0}=1$$

ఉదాహరణ -9. cos 7A = sin(A – 6°) ఇంకా 7A అల్పకోణం అయిన A విలువ ఎంత ?

సాధన : : Given cos 7A = sin(A – 6°)

$\boxed{\cos\theta=sin\,(90^0-\theta)}$

$sin\,(90^0-7A)=\sin(A-6^0)$

(90^0-7A) మరియు $(A-6^0)$ లు అల్పకోణాలు

కావున $90^0-7A=A-6^0$

$A+7A=90^0+6^0$

$8A=96^0$

$$A=\frac{96^0}{8}=12^0$$

ఉదాహరణ -10. sin A = cos B అయిన A + B = 90⁰ అని చూపుము .

సాధన : : sin A = cos B అని ఇవ్వబడింది

$\boxed{\cos\theta=sin\,(90^0-\theta)}$

$\sin A=sin\,(90^0-B)$

A మరియు 90^0-B లు అల్పకోణాలు

$A=90^0-B$

$\Rightarrow A+B=90^0$

ఉదాహరణ -11: sin 81⁰ + tan 81⁰ విలువను 0⁰ మరియు 45⁰ మధ్యత్రికోణమితీయ

నిష్పత్తులలో చూపుము

సాధన : $\sin 81^0 + \tan 81^0$

$\sin\theta = \cos(90^0 - \theta)$
$\tan\theta = \cot(90^0 - \theta)$

$= \cos(90^0 - 81^0) + \cot(90^0 - 81^0)$

$= \cos 9^0 + \cot 9^0$

ఉదాహరణ -12. త్రిభుజం ABC లోని అంతరకోణాలు A, B మరియు C లు అయిన $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$

సాధన : A, B మరియు C లు త్రిభుజం ABC లోని కోణాలు కావున

$A+B+C = 180^0$

ఇరువైపులా 2 చే భాగించగా

$$\frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = \frac{180^0}{2}$$

$$\frac{B+C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2}$$

ఇరువైపులా త్రికోణమితీయ నిష్పత్తి sin తీసుకొనగా

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(90^0 - \frac{A}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

$\sin(90^0 - \theta) = \cos\theta$

అభ్యాసం 11.3

1. విలువ కనుక్కోండి

(i) $\frac{tan36^0}{cot54^0}$

సాధన : $\frac{tan36^0}{cot54^0} = \frac{cot(90^0 - 36^0)}{cot54^0} = \frac{cot54^0}{cot54^0} = 1$

$\tan\theta = \cot(90^0 - \theta)$

(ii) $\cos 12^0 - \sin 78^0$

సాధన : $\cos 12^0 - \sin 78^0$

$\sin\theta = \cos(90^0 - \theta)$

$= \cos 12^0 - \cos(90^0 - 78^0)$

$= \cos 12^0 - \cos 12^0$

$= 0$

(iii) $\boldsymbol{cosec\ 31^0 - \sec 59^0}$

సాధన: $cosec\ 31^0 - \sec 59^0$

$\sec\theta = cosec(90^0 - \theta)$

$= cosec\ 31^0 - cosec(90^0 - 59^0)$

$= cosec\ 31^0 - cosec\ 31^0$

$= 0$

BALABHADRA SURESH

(iv) $\mathbf{\sin 15^0 \sec 75^0}$

సాధన: $\sin 15^0 \sec 75^0$

$$= \sin 15^0 \times \text{cosec}(90^0 - 15^0)$$

$$= \sin 15^0 \times \text{cosec}\, 15^0$$

$$= \sin 15^0 \times \frac{1}{\sin 15^0} = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \sec\theta = \text{cosec}(90^0 - \theta) \\ cose\ \theta = \dfrac{1}{\sin\theta} \end{array}}$$

(i) $\mathbf{\tan 26^0 \tan 64^0}$

సాధన: $\tan 26^0 \tan 64^0$

$$= \tan 26^0 \cot(90^0 - 64^0)$$

$$= \tan 26^0 \times \cot 26^0$$

$$= \tan 26^0 \times \frac{1}{\tan 26^0} = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \tan\theta = \cot(90^0 - \theta) \\ \cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} \end{array}}$$

2. **నిరూపించండి**

(i) $\mathbf{\tan 48^0 \tan 16^0 \tan 42^0 \tan 74^0 = 1}$

సాధన: $\tan 48^0 \tan 16^0 \tan 42^0 \tan 74^0$

$$= \tan 48^0 \tan 16^0 \cot(90^0 - 42^0)\cot(90^0 - 74^0)$$

$$= \tan 48^0 \tan 16^0 \cot 48^0 \cot 16^0$$

$$= \tan 48^0 \times \tan 16^0 \times \frac{1}{\tan 48^0} \times \frac{1}{\tan 16^0}$$

$$= 1$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \tan\theta = \cot(90^0 - \theta) \\ \cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} \end{array}}$$

(ii) $\mathbf{\cos 36^0 . \cos 54^0 - \sin 36^0 . \sin 54^0}$

సాధన: $\cos 36^0 . \cos 54^0 - \sin 36^0 . \sin 54^0$

$$= \sin(90^0 - 36^0).\sin(90^0 - 54^0) - \sin 36^0 . \sin 54^0$$

$$= \sin 54^0 . \sin 36^0 - \sin 36^0 . \sin 54^0$$

$$= 0$$

$$\boxed{\cos\theta = \sin(90^0 - \theta)}$$

3. $\mathbf{\tan 2A = \cot(A - 18^0)}$ **,2A లఘుకోణం అయిన A విలువ కనుక్కోండి**

$$\boxed{\tan\theta = \cot(90^0 - \theta)}$$

సాధన: $\tan 2A = \cot(A - 18^0)$

$$\cot(90^0 - 2A) = \cot(A - 18^0)$$

$$90^0 - 2A = A - 18^0$$

$$A + 2A = 90^0 + 18^0$$

$$3A = 108^0 \Rightarrow A = \frac{108^0}{3} \Rightarrow A = 36^0.$$

4. A , B లు లఘుకోణాలు మరియు tan A = cot B అయిన $A + B = 90^0$ అని చూపుము.

BALABHADRA SURESH

సాధన $\tan A = \cot B$

$\tan A = \tan(90^0 - B)$

$A = 90^0 - B$ (A , B లు లఘుకోణాలు)

$A + B = 90^0$

$\boxed{\cot\theta = \tan(90^0 - \theta)}$

5. **A, B మరియు C లు త్రిభుజం ABC లోని అంతరకోణాలు అయిన $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$.**

సాధన: త్రిభుజం లోని అంతరకోణాల మొత్తం $= 180^0$

$A+B+C = 180^0$

ఇరువైపులా 2 చే భాగించగా

$$\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{180^0}{2}$$

$$\frac{A+B}{2} = 90^0 - \frac{C}{2}$$

ఇరువైపులా త్రికోణమితీయ నిష్పత్తి sin తీసుకొనగా

$$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan\left(90^0 - \frac{C}{2}\right)$$

$$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$$

$\boxed{\tan(90^0 - \theta) = \cot\theta}$

6. **$\sin 75^0 + \cos 65^0$ ను 0^0 మరియు 45^0 మధ్య గల విలువల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులలో తెలుపుము**

.

సాధన: $\sin 75^0 + \cos 65^0$

$= \cos(90^0 - 75^0) + \sin(90^0 - 65^0)$

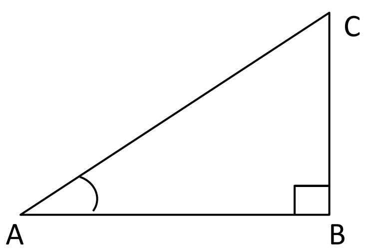
$= \cos 15^0 + \sin 25^0$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\theta &= \cos(90^0 - \theta) \\ \cos\theta &= \sin(90^0 - \theta) \end{aligned}}$$

BALABHADRA SURESH

త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణాలు :

ఉదాహరణ : $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ అని నిరూపించుము .



సాధన: $In\ \Delta ABC, \angle B = 90^0$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం)

ఇరువైపులా AC^2 చే భాగించగా

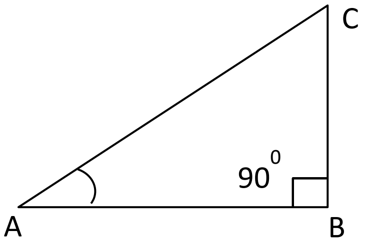
$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

ఉదాహరణ : $\boldsymbol{sec^2 A - tan^2 A = 1}$ అని నిరూపించుము

సాధన: $In\ \Delta ABC\ , \angle B = 90^0$



$AB^2 + BC^2 = AC^2$(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం)

ఇరువైపులా AB^2 చే భాగించగా

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

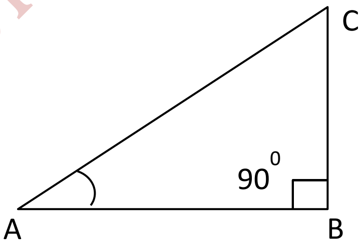
$$1 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$$1 + tan^2 A = sec^2 A$$

$$sec^2 A - tan^2 A = 1$$

ఉదాహరణ : $\boldsymbol{cosec^2 A - cot^2 A = 1}$అని నిరూపించుము

సాధన: $In\ \Delta ABC\ , \angle B = 90^0$



$AB^2 + BC^2 = AC^2$(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం)

ఇరువైపులా BC^2 చే భాగించగా

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + 1 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

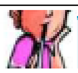
$$cot^2 A + 1 = cosec^2 A$$

$$cosec^2 A - cot^2 A = 1$$

BALABHADRA SURESH

త్రికోణమితీయ సర్వ సమీకరణాలు

$sin^2 A + cos^2 A = 1$ $sin^2 A = 1 - cos^2 A$ $\sin A = \sqrt{1 - cos^2 A}$ $cos^2 A = 1 - sin^2 A$ $\cos A = \sqrt{1 - sin^2 A}$	$sec^2 A - tan^2 A = 1$ $sec^2 A = 1 + tan^2 A$ $tan^2 A = sec^2 A - 1$ $\sec A + \tan A = \frac{1}{secA - tanA}$ $\sec A - \tan A = \frac{1}{secA + tanA}$	$cosec^2 A - cot^2 A = 1$ $cosec^2 A = 1 + cot^2 A$ $cot^2 A = cosec^2 A - 1$ $\mathrm{cosec}\, A + \cot A = \frac{1}{cosecA - cotA}$ $\mathrm{cosec}\, A - \cot A = \frac{1}{cosecA + cotA}$


ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

$0^0 \le A \le 90^0$ అన్ని విలువలకు త్రికోణమితీయ సర్వ సమీకరణాలు సత్యమేనా ?

$\boldsymbol{sec^2 A - tan^2 A = 1}$ $\quad$ $\boldsymbol{cosec^2 A - cot^2 A = 1}$

సాధన : sec 90^0 మరియు tan 90^0 లు నిర్వచించబడవు .

కావున $sec^2A - tan^2A = 1$ సమీకరణం 90^0 కు నిర్వచించబడదు

Cosec 0^0 మరియు cot 0^0 లు నిర్వచించబడవు.

కావున , $cosec^2A - cot^2A = 1$ సమీకరణం 0^0 కు నిర్వచించబడదు

ఇవి చేయండి

(i) $\sin A = \frac{15}{17}$, అయిన cos A విలువ కనుగొనుము .

సాధన : $sin^2A + cos^2A = 1$

$$cos^2A = 1 - sin^2A = 1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{225}{289} = \frac{289 - 225}{289} = \frac{64}{289}$$

$$\cos A = \sqrt{\frac{64}{289}} \Rightarrow \cos A = \frac{8}{17}$$

(ii) $\tan x = \frac{5}{12}$, అయిన $sec\ x$ విలువ కనుగొనుము

సాధన : $sec^2x - tan^2x = 1$

$$sec^2x = 1 + tan^2x$$

$$= 1 + \left(\frac{5}{12}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{25}{144}$$

$$= \frac{169}{144}$$

$$\sec x = \sqrt{\frac{169}{144}} \Rightarrow \sec x = \frac{13}{12}$$

(iii) cosec $\theta = \frac{25}{7}$, అయిన cot θ విలువ కనుగొనుము

సాధన : $cosec^2\theta - cot^2\theta = 1$

$$cot^2\theta = cosec^2\theta - 1$$

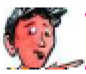
$$= \left(\frac{25}{7}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{625}{49} - 1$$

$$= \frac{625 - 49}{49}$$

$$= \frac{576}{49}$$

$$\cot\theta = \sqrt{\frac{576}{49}} \Rightarrow \cot\theta = \frac{24}{7}$$



ప్రయత్నించండి

క్రింది వాటి విలువలను సకారణంగా కనుగొనుము .

(i) $\frac{sin^2 15^0 + sin^2 75^0}{cos^2 36^0 + cos^2 54^0}$

సాధన : $\frac{sin^2 15^0 + sin^2 75^0}{cos^2 36^0 + cos^2 54^0}$

$\sin\theta = \cos(90^0 - \theta)$

$\sin 75^0 = \cos(90^0 - 75^0) = \cos 15^0$

$\cos\theta = \sin(90^0 - \theta)$

$\cos 36^0 = \sin(90^0 - 36^0) = \sin 54^0$

BALABHADRA SURESH

$$= \frac{sin^2 15^0 + cos^2 15^0}{sin^2 54^0 + cos^2 54^0} = \frac{1}{1} = 1$$

(ii) $\mathbf{\sin 5^0 \cos 85^0 + \cos 5^0 \sin 85^0}$

$\cos 85^0 = \sin 5^0$
$\sin 85^0 = \cos 5^0$

సాధన: $sin\,5^0\, cos\,85^0 + cos\,5^0\, sin\,85^0$

$= sin\,5^0 \times sin\,5^0 + cos\,5^0 \times cos\,5^0$

$= sin^2 5^0 + cos^2 5^0 = 1$

(iii) $\mathbf{\sec 16^0\ cosec\ 74^0 - \cot 74^0 \tan 16^0}$

$cose\ \theta = \sec(90^0 - \theta)$
$cosec\ 74^0 = \sec(90^0 - 74^0) = sec\ 16^0$
$\cot\theta = \tan(90^0 - \theta)$
$\cot 74^0 = \tan(90^0 - 74^0) = tan\ 16^0$

సాధన: $sec\ 16^0\ cosec\ 74^0 - cot\ 74^0\ tan\ 16^0$

$= sec\ 16^0 \times sec\ 16^0 - tan\ 16^0 \times tan\ 1$

$= sec^2 16^0 - tan^2 16^0$

$= 1$

$sec^2 A - tan^2 A = 1$

ఉదాహరణ -13. $\cot\theta + \tan\theta = \sec\theta\ \mathrm{cosec}\,\theta$ నిరూపించండి

సాధన: LHS $= \cot\theta + \tan\theta$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{cos^2\theta + sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \frac{1}{sin\,\theta\, cos\,\theta}$$
$$= \frac{1}{sin\,\theta} \times \frac{1}{cos\,\theta}$$
$$= cosec\,\theta\,.\sec\theta$$

ఉదాహరణ -14. $\boldsymbol{tan^2\theta + tan^4\theta = sec^4\theta - sec^2\theta}$ నిరూపించండి

సాధన: L.H.S$=tan^2\theta + tan^4\theta$
$= tan^2\theta(1 + tan^2\theta)$
$= (sec^2\theta - 1)sec^2\theta$
$= sec^4\theta - sec^2\theta = R.H.S$

$sec^2 A - tan^2 A = 1$
$\Rightarrow sec^2 A = 1 + tan^2 A$
$sec^2 A - 1 = tan^2 A$

ఉదాహరణ $-$ 15: $\boldsymbol{\sqrt{\frac{1 + cos\,\theta}{1 - cos\,\theta}} = cosec\,\theta + cot\,\theta}$ నిరూపించండి.

సాధన : $L.H.S = \sqrt{\frac{1 + cos\,\theta}{1 - cos\,\theta}}$

$$= \sqrt{\frac{(1 + cos\,\theta)(1 + cos\,\theta)}{(1 - cos\,\theta)(1 + cos\,\theta)}}$$
$$= \sqrt{\frac{(1 + cos\,\theta)^2}{1 - cos^2\,\theta}}$$
$$= \sqrt{\frac{(1 + cos\,\theta)^2}{sin^2\,\theta}} \qquad (1 - cos^2\theta = sin^2\theta)$$
$$= \frac{1 + cos\,\theta}{\sin\theta}$$

BALABHADRA SURESH

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = cosec\,\theta + \cot\theta = R.H.S$$

అభ్యాసం 11.4

1. కింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి :

(i) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - cosec\,\theta)$

సాధన : $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - cosec\,\theta)$

$$= \left(1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)\left(1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\right)$$
$$= \left(\frac{\cos\theta + \sin\theta + 1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin\theta + \cos\theta - 1}{\sin\theta}\right)$$
$$= \left[\frac{(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1^2}{\sin\theta\cos\theta}\right]$$
$$= \left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$
$$= \frac{1 + 2\sin\theta\cos\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2$$

(ii) $(\boldsymbol{\sin\theta + \cos\theta})^2 + (\boldsymbol{\sin\theta - \cos\theta})^2$

సాధన: $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta$$
$$= 1 + 1 = 2$$

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

(iii) $(\boldsymbol{\sec^2\theta - 1})(\boldsymbol{cosec^2\theta - 1})$

సాధన: $(\sec^2\theta - 1)(cosec^2\theta - 1)$

$$= \tan^2\theta \times \cot^2\theta$$
$$= \tan^2\theta \times \frac{1}{\tan^2\theta} = 1$$

2. ***Show that*** $\boldsymbol{(cosec\,\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$

సాధన: $(cosec\,\theta - \cot\theta)^2$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$
$$= \left(\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$
$$= \frac{(1 - \cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{(1 - \cos\theta)^2}{1 - \cos^2\theta}$$
$$= \frac{(1 - \cos\theta)(1 - \cos\theta)}{(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)}$$
$$= \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$$

3. $\boldsymbol{\sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A}$ నిరూపించుము

BALABHADRA SURESH

సాధన: $\sqrt{\dfrac{1+sin\,A}{1-sin\,A}}$

$$= \sqrt{\frac{(1+sin\,A)(1+sin\,A)}{(1-sin\,A)(1+sin\,A)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+sin\,A)^2}{1-sin^2A}}$$

$$= \frac{\sqrt{(1+sin\,A)^2}}{\sqrt{cos^2A}}$$

$$= \frac{1+sinA}{\cos A}$$

$$= \frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \sec A+\tan A$$

4. $\boldsymbol{\dfrac{1-tan^2A}{cot^2A-1}=tan^2A}$ **అని చూపండి**

సాధన: $\dfrac{1-tan^2A}{cot^2A-1}$

$$= \frac{1-tan^2A}{\frac{1}{tan^2A}-1}$$

$$= \frac{1-tan^2A}{\frac{1-tan^2A}{tan^2A}}$$

$$= (1-tan^2A)\times\frac{tan^2A}{1-tan^2A}$$

$$= tan^2A$$

5. $\boldsymbol{\dfrac{1}{\cos\theta}-\cos\theta=\tan\theta.\sin\theta}$ **చూపండి**

సాధన: $\dfrac{1}{cos\,\theta}-cos\,\theta$

$$= \frac{1-cos^2\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\sin\theta$$

$$= \tan\theta\,.\sin\theta$$

6. **secA (1 – sinA)(secA + tanA) సూక్ష్మీకరించండి**

సాధన: $secA\,(1-sinA)\,(secA\,+\,tanA)$

$$= \frac{1}{\cos A}\times(1-sinA)\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{(1-sinA)}{\cos A}\times\frac{(1+sinA)}{cos\,A}$$

$$= \frac{1-sin^2A}{cos^2A}$$

BALABHADRA SURESH

$$= \frac{cos^2 A}{cos^2 A} = 1$$

7. $(\sin A + cosecA)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + tan^2 A + cot^2 A$ **అని నిరూపించండి**

సాధన: $L.H.S = (sin\,A + cosecA)^2 + (cos\,A + sec\,A)^2$

$$= sin^2 A + cosec^2 A + 2\sin A.cosec\,A + cos^2 A + sec^2 A + 2.cos\,A.\sec A$$

$$= sin^2 A + cos^2 A + cosec^2 A + sec^2 A + 2\sin A \times \frac{1}{\sin A} + 2cos\,A \times \frac{1}{\cos A}$$

$$= 1 + cot^2 A + 1 + tan^2 A + 1 + 2 + 2$$

$$= 7 + tan^2 A + cot^2 A$$

$$= R.H.S$$

8. $(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)(1 + \cot^2\theta)$ **సూక్ష్మీకరించండి**

సాధన: $(1 - cos\,\theta)\,(1 + cos\theta)\,(1 + cot^2\theta)$

$$= (1 - cos^2\theta)cosec^2\theta$$

$$= sin^2\theta \times \frac{1}{sin^2\theta} = 1$$

9. $\sec\theta + \tan\theta = p$ **అయితే** $\sec\theta - \tan\theta$ **విలువ ఎంత ?**

సాధన: $sec^2\theta - tan^2\theta = 1$

$$(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$$

$$\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{sec\,\theta + tan\,\theta}$$

$$\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{p}$$

10. $\mathrm{cosec}\,\theta + \cot\theta = k$ **అయితే** $\cos\theta = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}$ **అని చూపండి .**

సాధన : $cosec\,\theta + \cot\theta = K$ --------(1)

$$cose^2\theta - cot^2\theta = 1$$

$$(cose\,\theta + \cot\theta)(cose\,\theta - cot\,\theta) = 1$$

$$k(cose\,\theta - cot\,\theta) = 1$$

$(cose\,\theta - cot\,\theta) = \frac{1}{k}$ --------(2)

(1)+(2)

$cosec\,\theta + \cot\theta = k$

$(cose\,\theta - cot\,\theta) = \frac{1}{K}$

$2cosec\,\theta \quad = k + \frac{1}{k}$

(1)-(2)

$cosec\,\theta + \cot\theta = k$

$(cosec\,\theta - cot\,\theta) = \frac{1}{K}$

$(-) \quad (+) \quad (-)$

$2cot\,\theta \quad = k - \frac{1}{k}$

BALABHADRA SURESH

$cosec\,\theta = \frac{k^2+1}{2k}$

$\cot\theta = \frac{k^2-1}{2k}$

$\sin\theta = \frac{2k}{k^2+1}$

$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{k^2-1}{2k}$

$$\sin\theta \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2k}{k^2+1} \times \frac{k^2-1}{2k}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{k^2-1}{k^2+1}$$

THANK YOU

BALABHADRA SURESH

9866845885

https://sureshmathsmaterial.com

BALABHADRA SURESH